Algorithms and Probability

Week 6

2025/03/27 — Georg Hasebe

Independence

Lemma 2.24. Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

cont'd on the blackboard.

Zufallsvariablen

Definition 2.25. Eine *Zufallsvariable* ist ein Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, wobei Ω die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Der Wertebereich von X ist definiert durch

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert } \omega \in \Omega \text{ so dass } X(\omega) = x\}.$$

Wenn Ω endlich [abzählbar] ist, ist W_X endlich [abzählbar].

Bespiel

Wir werfen eine ideale Münze dreimal. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis “Kopf”.

Q: Was ist Ω?

A: $\Omega = \{K, Z\}^3$

Q: Was ist $Y(KZK)$ und $Y(KKK)$?

A: $Y(KZK) = 2$, $Y(KKK) = 3$

Q: Was ist W_Y (Wertebereich von Y)?

A: $W_Y = \{0,1,2,3\}$

Notation

Sei X eine Zufallsvariable und sei $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Das Ereignis $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ wird oft mit der Schreibweise $X = x_i$ abgekürzt.

Damit wird $\Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}]$ zu $\Pr[X = x_i]$.

Analog: $\Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_i\}]$ gleich $\Pr[X \leq x_i]$ oder $\displaystyle\sum_{x \in W_X:\ x \leq x_i} \Pr[X = x]$.

Analog: $\Pr[X \geq x_i], \Pr[2 < X < 7], \Pr[X^2 \geq 2], \dots$

Dichte-/Verteilungsfunktion

Sei X eine Zufallsvariable.

Dichtefunktion von X:

$$f_X\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion von X:

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Beispiel

Wir werfen eine ideale Münze dreimal. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis “Kopf”.

Q: Was ist die Dichtefunktion f_Y von Y?

Q: Was ist die Verteilungsfunktion F_Y von Y?

A: (Blackboard)

Dichtefunktion von X:

$$f_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion von X:

$$F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Erwartungswert

Definition 2.27. Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

From the official lecture slides: “Vorlesung: wir betrachten nur Zufallsvariablen für die der Erwartungswert existiert.”

Erwartungswert

Lemma 2.29. Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Vergleich mit Def. 2.27: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x].$

Erinnerung 1: $\Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}].$

Erinnerung 2: $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$

Beispiel

Wir werfen einen fairen Würfel. Die Zufallsvariable X bezeichne die Augenzahl des Würfels. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Nach Lemma 2.29 gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega]$ und wir bekommen

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \{1,2,3,4,5,6\}} X(\omega) \Pr[\omega] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Sei $\Omega = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$ ein Laplaceraum und sei ω ein (zufälliges) Elementarereignis in Ω. Berechnen Sie $\mathbb{E}[|\omega|]$.

Erwartungswert

Satz 2.33. *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b.$$

Proof for $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$ on the blackboard.

Indikatorvariablen

Beobachtung 2.35. Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = \Pr[A]$.

Since in the sum $\mathbb{E}[X_A] = \sum_{\omega \in \Omega} X_A(\omega) \Pr[\omega]$ only the $\omega \in A$ “survive”, the rest is multiplied by zero.

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \{0,1\}$ und der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} p & x = 1, \\ 1 - p & x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heisst **bernoulli-verteilt**. Wir schreiben: $X \sim \text{Ber}(p)$.

Nach Definition von f_X gilt also $\Pr[X = 0] = 1 - p$ und $\Pr[X = 1] = p$.

Es gilt: $\mathbb{E}[X] = p$.

Beispiele

- Werfen einer Münze, Indikator für Kopf
- Werfen eines Würfels, Indikator für “Augenzahl gerade”
- Werfen eines Würfels, Indikator für “1”

Binomialverteilung

Bernoulli-verteilte Zufallsvariable erhalten wir zum Beispiel als Indikator für "Kopf", wenn wir ein Münze einmal werfen.

Werfen wir die Münze statt dessen n-mal und fragen wie oft wir Kopf erhalten haben, so ist die entsprechende Zufallsvariable **binomialverteilt**.

Für die Dichtefunktion einer binomialverteilten Zufallsvariable X gilt:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \{0,1,\ldots,n\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $\mathbb{E}[X] = np$

Seien $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ zwei unabhängige binomielle Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

$X_1 + X_2 \sim$ Bin(m, q)? Wenn ja, für welche m, q?

Beispiel (Blackboard)

Fünf faire Münzen werden geworfen. Sei X die Zufallsvariable, die zählt, wie oft Kopf erscheint. Bestimmen Sie den Wert $f_X(3)$ und erklären Sie, wie sie auf diesen Wert gekommen sind.

Geometrische Verteilung

Man stelle sich ein Experiment vor, bei dem eine Aktion so lange wiederholt wird, bis sie erfolgreich ist (z.B. bis das erste mal Kopf kommt).

Wenn ein einzelner Versuch mit (Erfolgs-)Wahrscheinlichkeit p gelingt, so ist die Anzahl der Versuche bis zum Erfolg **geometrisch verteilt** und man schreibt $X \sim \text{Geo}(p)$.

Für die Dichtefunktion einer **geometrisch verteilten** Zufallsvariable X gilt:

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $\mathbb{E}[X] = 1/p$.

Beispiel (Blackboard)

Eine Urne enthält N weisse und M schwarze Bälle. Es werden zufällig Bälle aus der Urne gezogen, bis ein schwarzer Ball gezogen wird. Ein gezogener Ball wird vor dem nächsten Zug ersetzt (gleiche Farbe).

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau n Züge notwendig sind?

Gedächtnislosigkeit

Satz 2.45. Ist $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t].$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit im ersten Wurf Kopf zu bekommen ist identisch zur Wahrscheinlichkeit nach 1000 Fehlversuchen im 1001ten Wurf Kopf zu bekommen

Coupon Collector

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

cont'd on the blackboard.

Betrachten Sie das Coupon-Collector-Problem mit nur zwei verschiedenen Coupons ($n = 2$). Die erwartete Anzahl Runden bis wir beide Coupons gesammelt haben ist 3.

Beispiel

Aufgabe 3 – *Fische im Teich*

Sie haben einen Teich mit n Lachsen und n Forellen. Sie haben einen Kescher, mit dem Sie Fische aus dem Teich fangen wollen. Jedes Mal wenn Sie einen Fisch fangen, fangen Sie einen Fisch zufällig gleichverteilt aus allen noch im Teich vorhandenen Fischen. Sie wollen nun für eine Grillparty alle Lachse fangen, um diese zu grillen. Da Sie die Forellenpopulation in Ihrem Teich erhalten wollen, werfen Sie jedes Mal, wenn Sie eine Forelle gefangen haben, diese zurück in den Teich (die Tiere leiden hierunter nicht!). Zeigen Sie, dass Sie in der Erwartung $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i}$ Fische fangen müssen, um alle Lachse zu fangen. *(5 Punkte)*

AlgoWahr FS21