Algorithms and Probability

Week 5

2025/03/20

Exercise Sheet 2

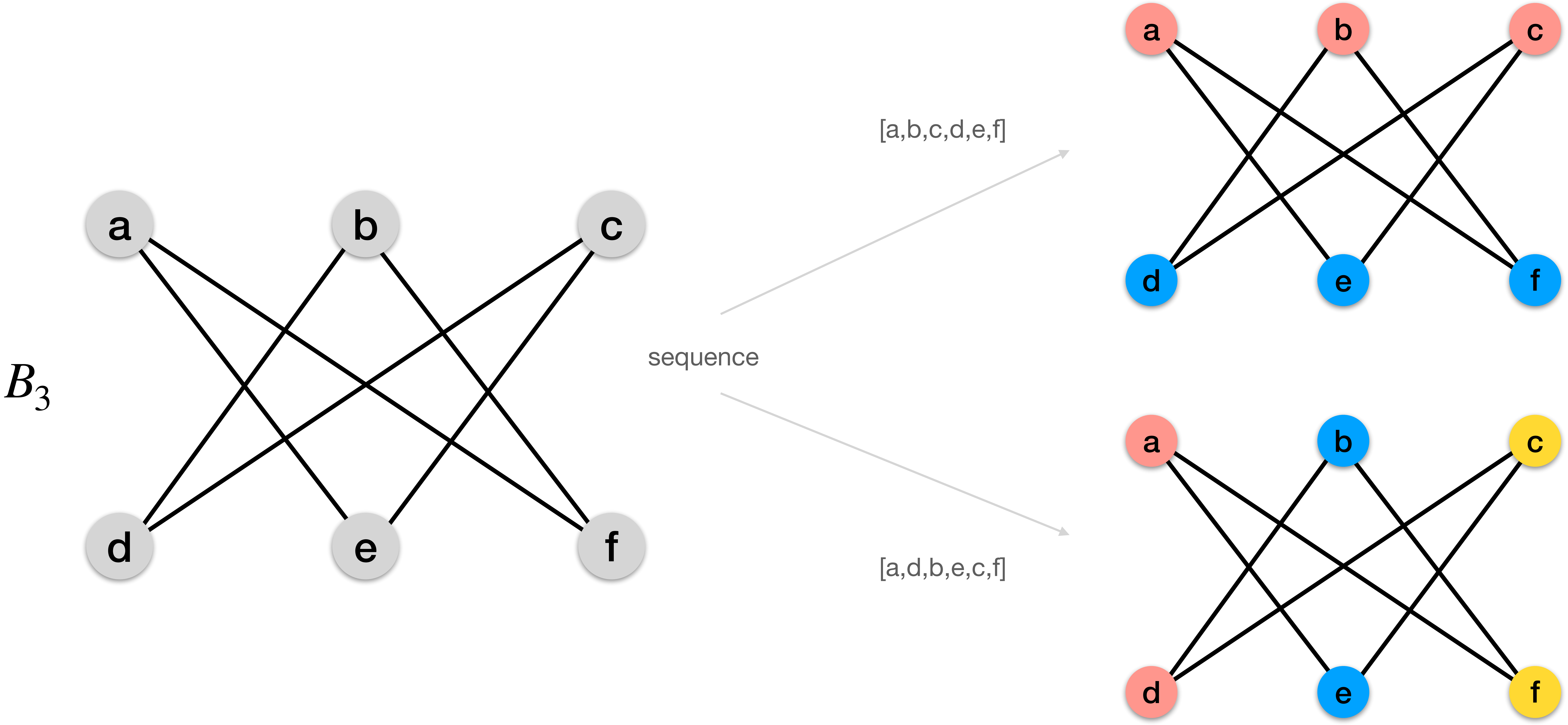
Greedy coloring

Greedy-Färbung (G)

1: wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
2: $c[v_1] \leftarrow 1$
3: **for** $i = 2$ **to** n **do**
4: $\quad c[v_i] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u)$ für alle $u \in N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\}$

Exercise

Beispiel 1.61. Betrachten wir den Graphen B_n mit $2n$ Knoten, der aus dem vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$ entsteht, indem man die Kanten zwischen gegenüberliegenden Knoten entfernt. Da der Graph B_n bipartit ist, könnte er eigentlich mit zwei Farben gefärbt werden; es ist aber nicht schwer einzusehen, dass es auch eine Reihenfolge der Knoten gibt, für die der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt (Übung!).



Coloring

GREEDY-FÄRBUNG (G)

4: $c[v_i] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u) \text{ für alle } u \in N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\}$

Beobachtung:
Gilt für die (gewählte) Reihenfolge $|N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \leq k \quad \forall\, 2 \leq i \leq n$,
dann benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens **k+1** viele Farben.

We want to minimize $|N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \,\forall 2 \leq i \leq n$.

The bigger i gets, the bigger $|\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}|$ becomes.

Have v_i where $|N(v_i)|$ is small, **at the end** of the sequence.

Heuristik:
v_n := Knoten vom kleinsten Grad. Lösche v_n.
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph. Lösche v_{n-1}.
Iteriere.

Heuristik:
v_n := Knoten vom kleinsten Grad. Lösche v_n.
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph. Lösche v_{n-1}.
Iteriere.

Korollar:
G=(V,E) zshgd. und es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) < \Delta(G)$
⇒ Heuristik $\boxed{\text{(oder Breiten-/Tiefensuche)}}$ liefert Reihenfolge, für die der Greedy-Algorithmus höchstens $\Delta(G)$ Farben benötigt

Proof

Let $v \in V$ s.t. $\deg(v) < \Delta(G)$.

Start BFS/DFS in v.

The sequence for the greedy algorithm is the **reverse order** of how we traversed the vertices in G (i.e. $v = v_n$).

Then every v_i, $i < n$ has at least one uncolored neighbor v_j where $j > i$ and thus at most $\Delta(G) - 1$ **colored** neighbors.

We started in v with $\deg(v) < \Delta(G)$, then $v_n = v$ and v_n has at most $\Delta(G) - 1$ colored neighbors. Greedy algorithm needs at most $\Delta(G)$ colors.

Recommendation

We just solved this.

Beispiel 1.62. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad $\Delta(G)$. Weiter nehmen wir an, dass es einen Knoten $v \in V$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$. Wenn wir jetzt eine Breiten- oder Tiefensuche in v starten und die Knoten in *umgekehrter* Reihenfolge nummerieren, wie sie vom Algorithmus durchlaufen werden (der Knoten v ist also der Knoten v_n), so hat jeder Knoten v_i mit $i < n$ mindestens einen Nachbarn v_j mit $j > i$ und daher höchstens $\Delta(G) - 1$ gefärbte Nachbarn. Der Knoten v_n hat nach Wahl ebenfalls nur $\Delta(G) - 1$ gefärbte Nachbarn. Der Greedy-Algorithmus benötigt daher für diese Reihenfolge der Knoten höchstens $\Delta(G)$ Farben.

Beispiel 1.63. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender k-regulärer Graph, in dem es mindestens einen Artikulationsknoten gibt. Wir wissen bereits aus Abschnitt 1.4.1, dass wir mit einer modifizierten Tiefensuche in Zeit $O(|E|)$ einen solchen Artikulationsknoten v bestimmen können. Seien $V_1, \ldots, V_s$ die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von $G - v$, wobei $s \geq 2$. Dann erfüllen alle Graphen $G_i := G[V_i \cup \{v\}]$, $1 \leq i \leq s$, die Annahme von Beispiel 1.62 – und können daher jeweils mit k Färben gefärbt werden. Durch eventuelles Vertauschen von Farben können wir zudem sicherstellen, dass in allen Graphen $G_1, \ldots, G_s$ der Knoten v die gleiche Farbe bekommen hat. Die Färbungen der Graphen G_i ergeben daher zusammen eine k-Färbung des Graphen G.

Skript p. 80

Theory Recap

Probability

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \le \Pr[\omega_i] \le 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

Note that the set Ω must be countable. In this course we will use mostly finite Ω.

Example

We throw a single, six-sided fair dice once; we observe the number on top.

Q: What is the Ergebnismenge Ω?

A: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Q: How would you describe the Ereignis E “the dice shows an even number”?

A: $E = \{2,4,6\}$

Q: What is the probability of Ereignis E, i.e. $\Pr[E]$?

A: $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$

Probability

Lemma 2.2. Für Ereignisse A, B gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.

Probability

Satz 2.3 (Additionssatz). Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

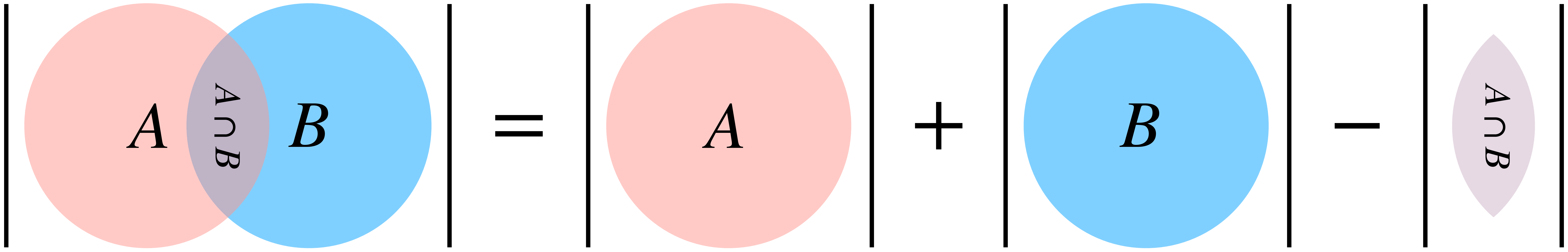
$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Korollar 2.6. *(Boolesche Ungleichung, Union Bound)* Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

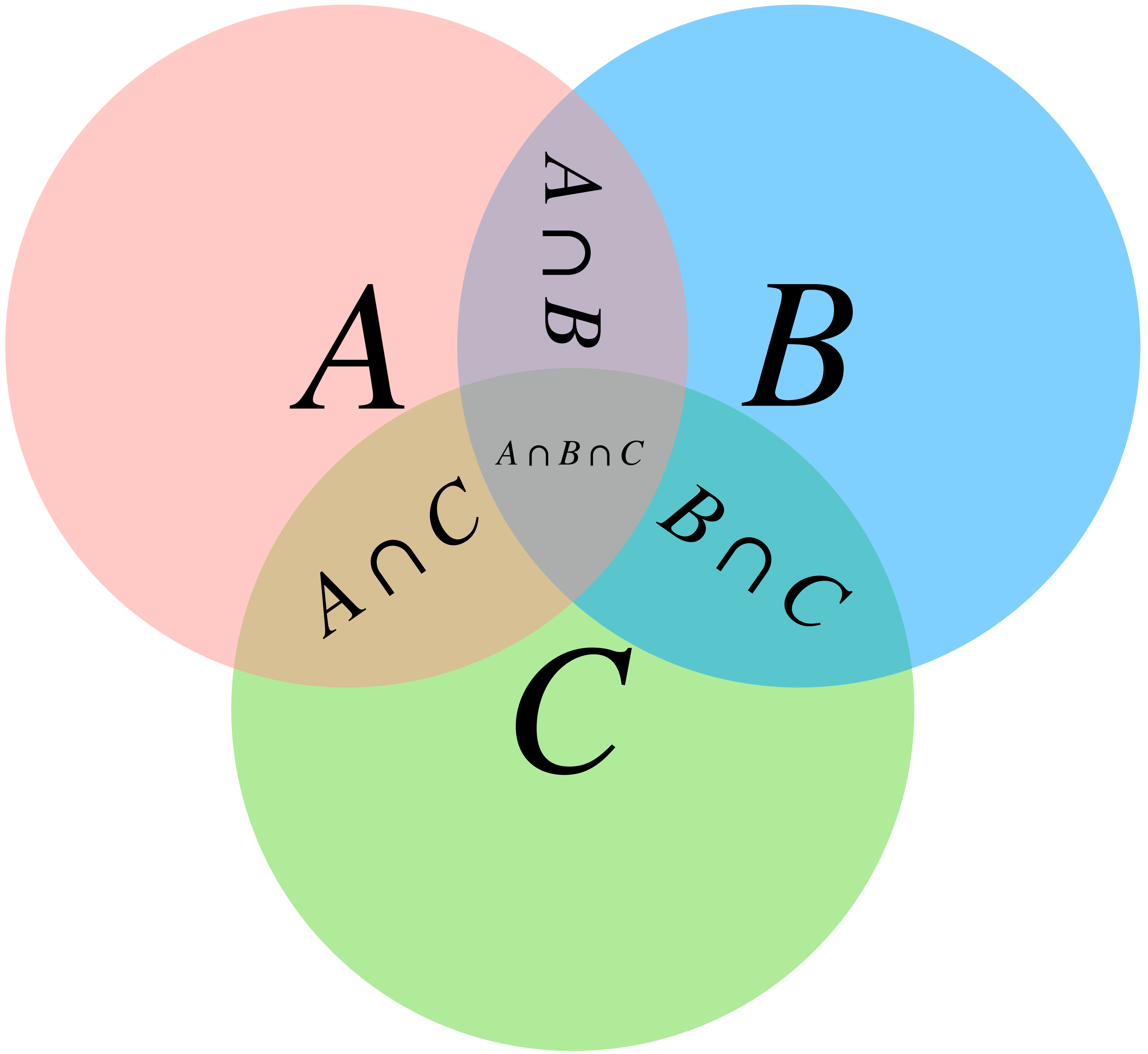
Siebformel

What is the cardinality of $A \cup B$, i.e. what is $|A \cup B|$?



We have $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Siebformel

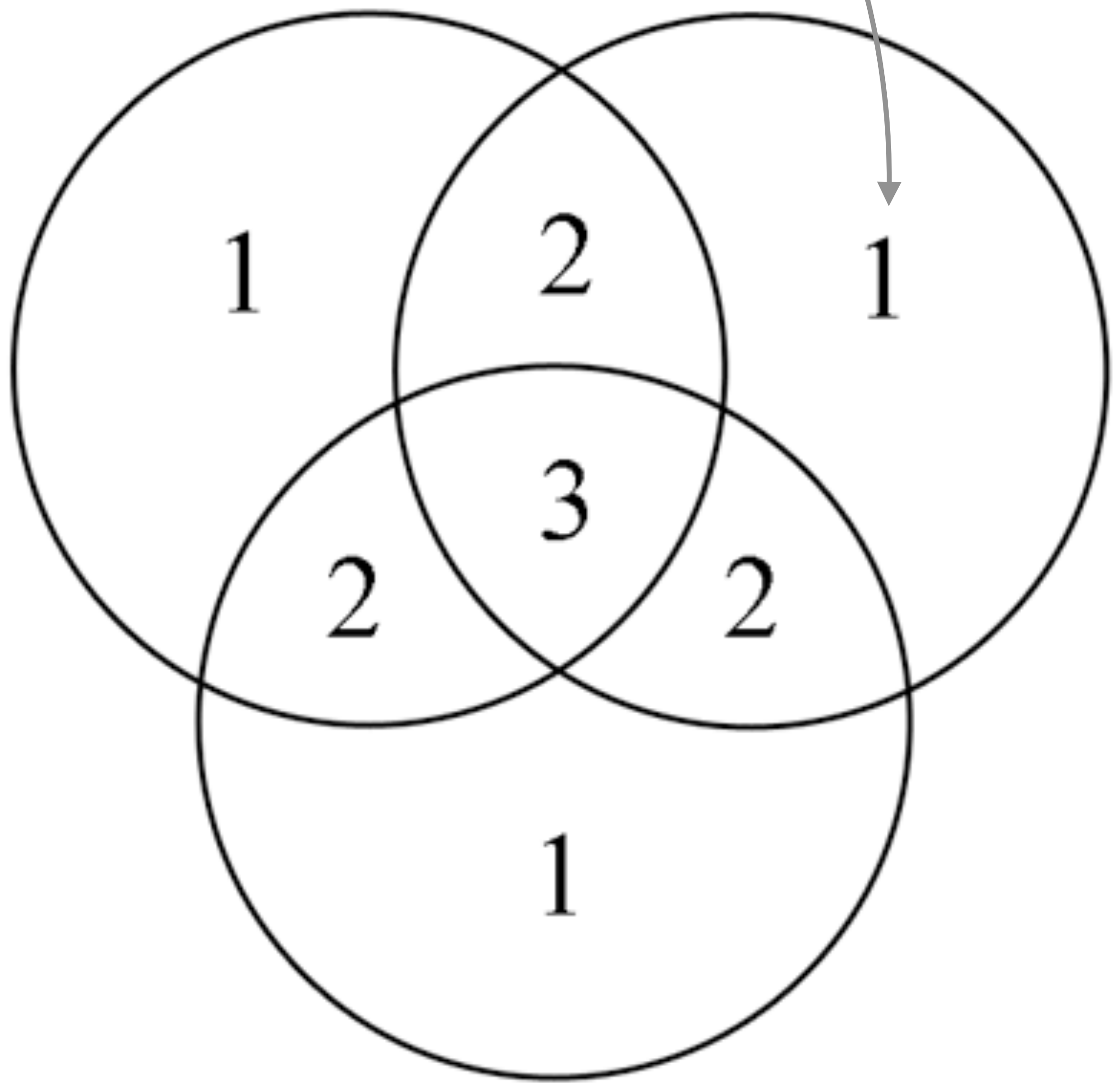


$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

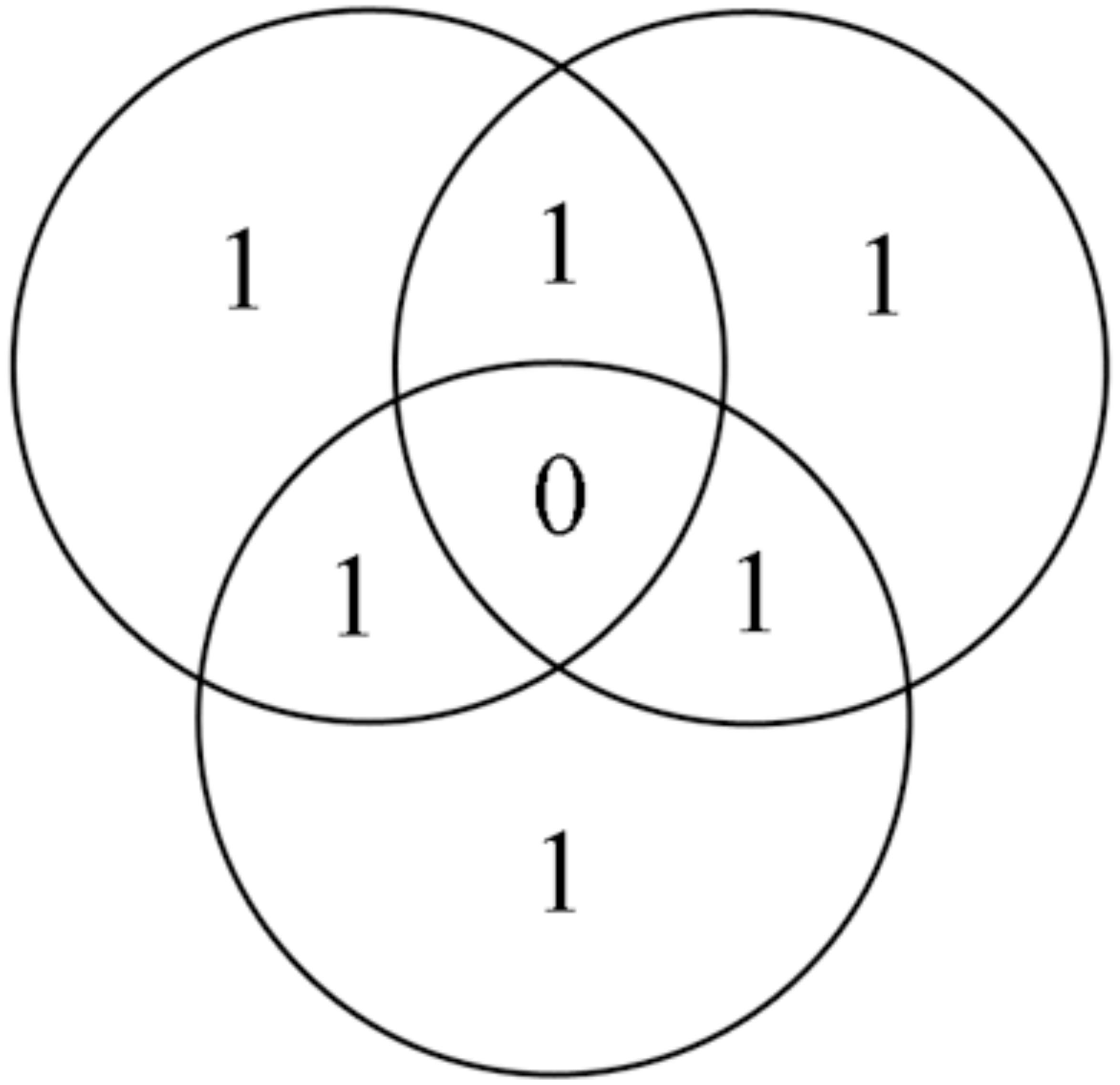
Siebformel

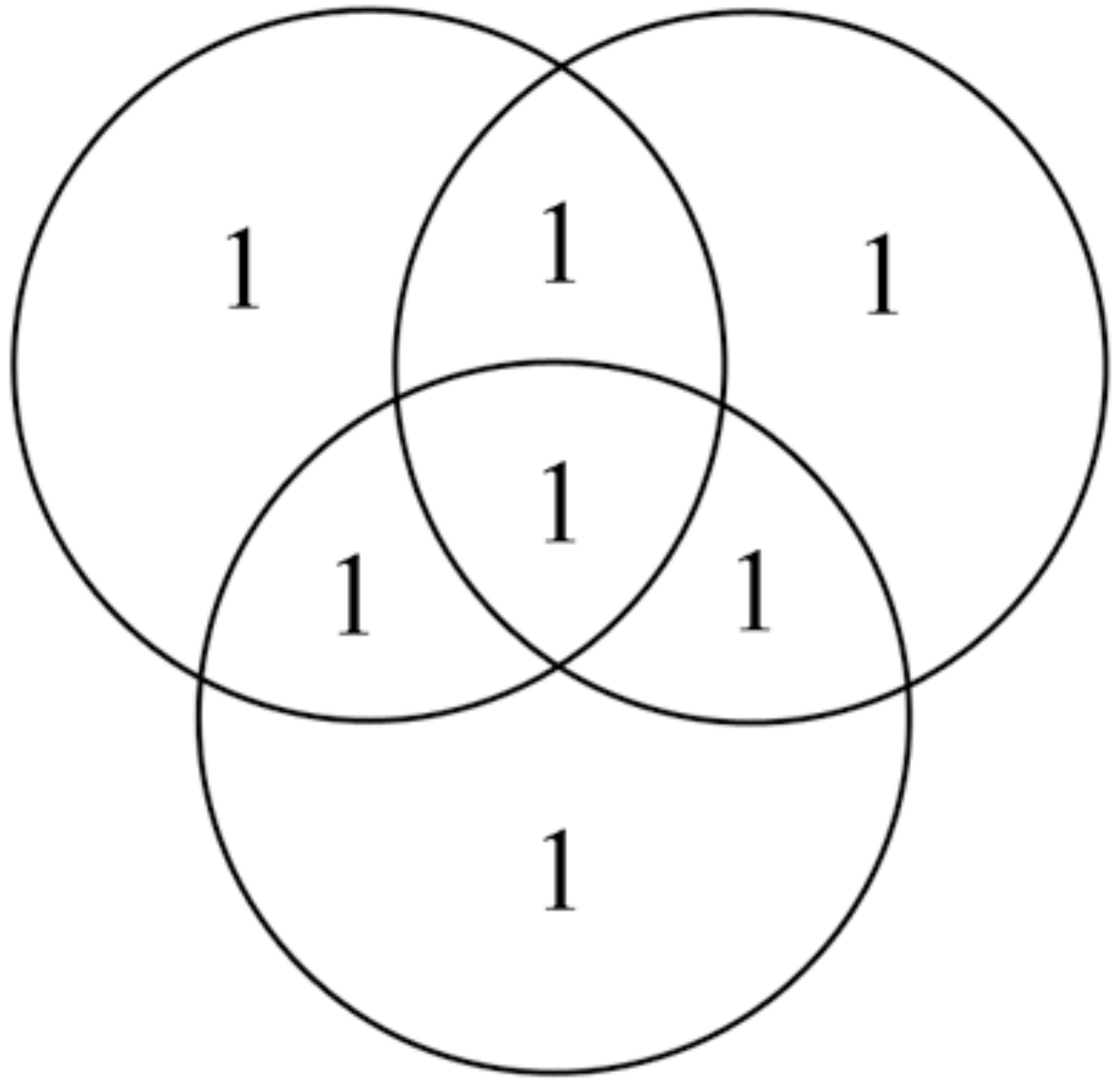
The number indicates how often elements of the particular segments are counted using the expression blow/above.

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$



$$|A| + |B| + |C|$$





$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Illustration source: Wikipedia.

Siebformel

Satz 2.5. *(Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)*
Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n].
\end{aligned}$$

There are a few different ways we can write this formula, see here: Wikipedia.

Combinatorics

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1)$,$(1,2)$,$(1,3)$ $(2,1)$,$(2,2)$,$(2,3)$ $(3,1)$,$(3,2)$,$(3,3)$	$\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ $\{2,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$ $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$	$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

Example: $k = 2$ and $n = 3$, e.g. $S = \{1,2,3\}$.

Combinatorics: Intuition

I highly suggest reading the “Kombinatorik kurz und knapp” slides from Prof. Dr. Erich Walter Farkas who teaches the “Wahrscheinlichkeit und Statistik” course this semester.

I will upload the relevant slides on my website.

Example

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$\Rightarrow \quad \Omega := \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5\}$

wobei $C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}$. $|C|=52$

$$|\Omega| = \begin{cases} 52^5 \cdot 52^5 & ✗ \\ \binom{52}{10} \cdot \binom{10}{5} & ✓ \\ \frac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 42!} & ✓ \\ \binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} & ✓ \end{cases}$$

Example

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$$\Omega := \{(X,Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5,$$
$$\text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}.$$

Beispiel für ein Ereignis: $E :=$ „Spieler A hat vier Asse“

$$\text{Prob}[E] = \frac{\text{Anzahl Möglichkeiten in denen Spieler A vier Asse hat}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

$$= \frac{48 \cdot \binom{47}{5}}{|\Omega|}$$

Conditional Probability

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

“A bedingt auf B” oder “A gegeben B”

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Conditional Probability

1. $\Pr[A \mid A] = 1$, because if we know A already happened, then the probability of A happening should be 1.

$$\Pr[A \mid A] = \frac{\Pr[A \cap A]}{\Pr[A]} = \Pr[A]/\Pr[A] = 1.$$

2. $\Pr[A \mid \Omega] = \Pr[A]$, since Ω doesn't give us any information about A.

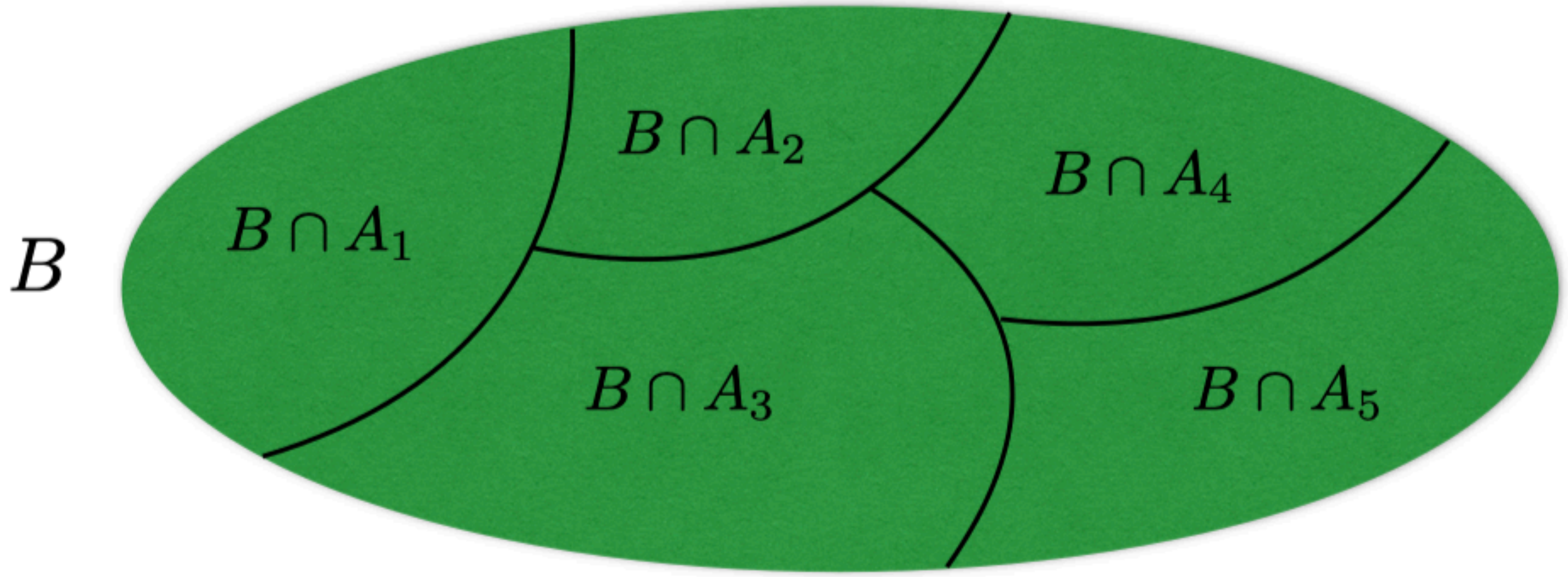
$$\Pr[A \mid \Omega] = \frac{\Pr[A \cap \Omega]}{\Pr[\Omega]} = \Pr[A]/1 = 1.$$

3. If B already happened, then A can only happen if also $A \cap B$ happened, so $\Pr[A \mid B]$ should be proportional to $\Pr[A \cap B]$.

Conditional Probability

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$



Conditional Probability

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$
Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

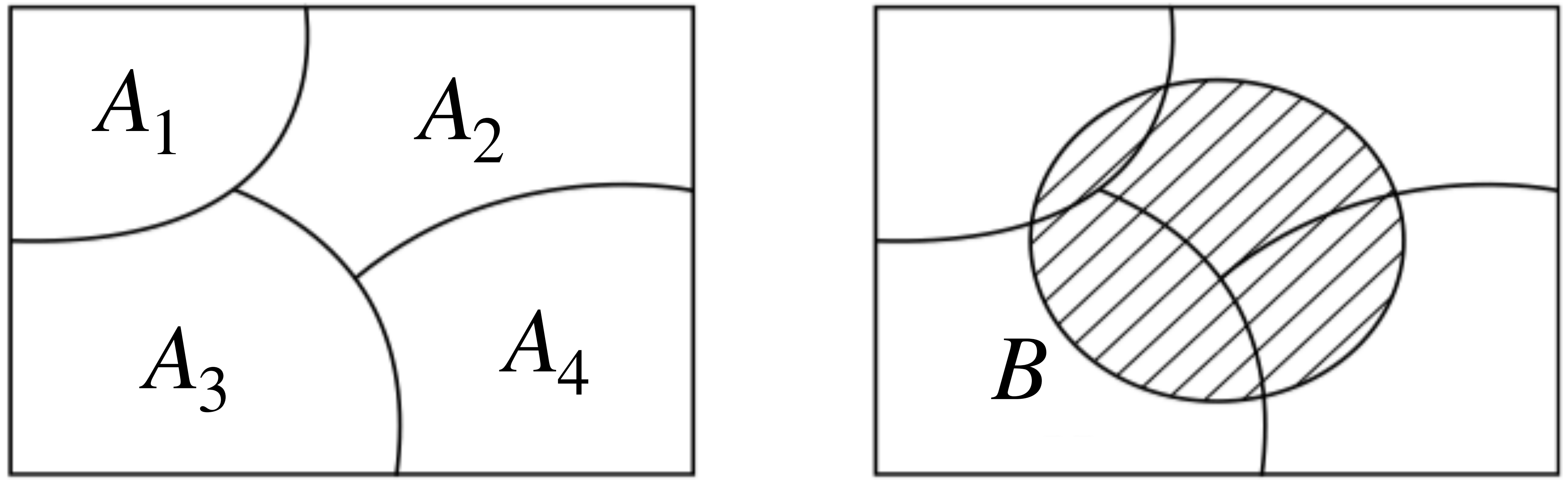


Illustration taken from "Wahrscheinlichkeit und Statistik" slides (Spring 2024), first chapter.

Interactive Example (Blackboard)

Beispiel 1.30. Eine Urne enthält gleich viele gewöhnliche wie gezinkte Würfel. Bei den gezinkten Würfeln ist die 6 durch eine 7 ersetzt. Man zieht zufällig einen Würfel und würfelt damit.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Zahl gerade ist?

Conditional Probability

Satz 2.15. *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Independence

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[A] \cdot \Pr[B]}{\Pr[B]} = \Pr[A]$$

“[…] das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten.”, skript p. 101

Interactive Example (Blackboard)

Beispiel 1.38. Eine Münze wird zweimal geworfen. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{\mathrm{ZZ}, \mathrm{ZK}, \mathrm{KZ}, \mathrm{KK}\}$.

Seien

$$A = \{\text{Kopf beim 1. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\}$$
$$B = \{\text{Kopf beim 2. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}\,.$$

Sind A und B unabhängig?

Interactive Example (Blackboard)

Übung 1.39. Wir werfen zwei voneinander unabhängige Würfel. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Betrachten wir folgende Ereignisse

- $A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in 2\mathbb{N}\}$, *erste Augenzahl ist gerade*,
- $C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 + \omega_2 \leq 3\}$, *die Summe ist höchstens 3*,

Sind A und C unabhängig?

Independence

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Interactive Example (Blackboard)

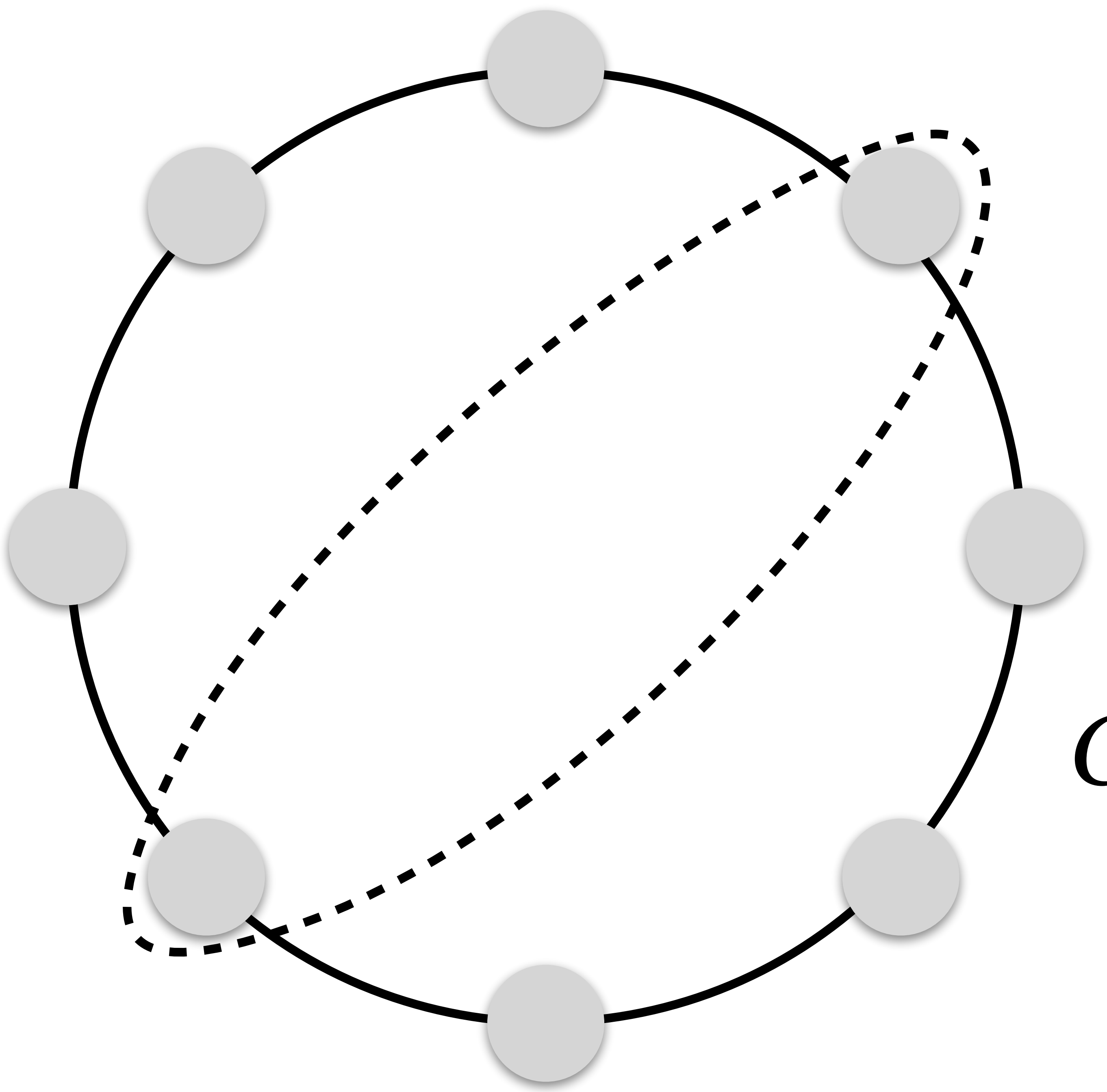
Beispiel 1.43. Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

$$A = \{\text{Kopf bei Wurf } 1\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\},$$
$$B = \{\text{Kopf bei Wurf } 2\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\},$$
$$C = \{\text{beide Würfe gleich}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZZ}\}.$$

what can we say about the independence of A,B,C?

Interactive Example (Blackboard)

Consider the cycle graph C_n. Two vertices are chosen randomly. What is the probability that they are neighbors?



Note that choosing vertex 1 and 2 is the same Ereignis as choosing vertex 2 and 1.

Interactive Example (Blackboard)

Given n people, what is the probability that two of them share a birthday?

Assume every year has 365. An Ereignis is of the form $\omega = \{t_1, \ldots, t_n\}$ where $t_i \in [365]$. Assume that every ω has the same probability.