Beispiel 1.30. Eine Urne enthält gleich viele gewöhnliche wie gezinkte Würfel. Bei den gezinkten Würfeln ist die 6 durch eine 7 ersetzt. Man zieht zufällig einen Würfel und würfelt damit.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Zahl gerade ist?

Sei $Z = \{\text{gezogener Würfel ist gezinkt}\}$ und
$G = \{\text{gewürfelte Zahl ist gerade}\}$. Dann ist $\mathbb{P}[Z] = \mathbb{P}[Z^{\complement}] = \frac{1}{2}$ und

$$\mathbb{P}[G \mid Z] = \frac{|\{2,4\}|}{|\{1,2,3,4,5,7\}|} = \frac{1}{3}\,.$$

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[G] &= \mathbb{P}[G \mid Z]\,\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[G \mid Z^{\complement}]\,\mathbb{P}[Z^{\complement}] \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,.\end{aligned}$$

Beispiel 1.38. Eine Münze wird zweimal geworfen. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{\mathrm{ZZ}, \mathrm{ZK}, \mathrm{KZ}, \mathrm{KK}\}$.

Seien

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Kopf beim 1. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\} \\ B &= \{\text{Kopf beim 2. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}. \end{aligned}$$

A und B sind unabhängig, denn

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[\{\mathrm{KK}\}] = \mathbb{P}[A \cap B].$$

Übung 1.39. Wir werfen zwei voneinander unabhängige Würfel. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Betrachten wir folgende Ereignisse

- $A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in 2\mathbb{N}\}$, *erste Augenzahl ist gerade*,
- $B = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_2 \in 2\mathbb{N} - 1\}$, *zweite Augenzahl ist ungerade*
- $C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 + \omega_2 \leq 3\}$, *die Summe ist höchstens 3*,
- $D = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 2\}$, *beide Augen sind höchstens 2*.

Zeigen Sie:

- (A und B sind unabhängig,)
- A und C sind nicht unabhängig,
- (A und D sind unabhängig.)

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\{2,4,6\} \times \{1,\ldots,6\}] = \frac{|\{2,4,6\} \times \{1,\ldots,6\}|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{18}{36} = 1/2$$

$$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[\{(1,1),(2,1),(1,2)\}] = \frac{3}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[\{(2,1)\}] = \frac{1}{36} = 1$$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[C] = \frac{1}{18}$$

$\mathbb{P}[A \cap C] \neq \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[C]$, not independent

Beispiel 1.43. Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Kopf bei Wurf 1}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\}\,, \\ B &= \{\text{Kopf bei Wurf 2}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}\,, \\ C &= \{\text{beide Würfe gleich}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZZ}\}\,. \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ &\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[\{KK\}] = \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Somit sind A, B und C paarweise unabhängig.

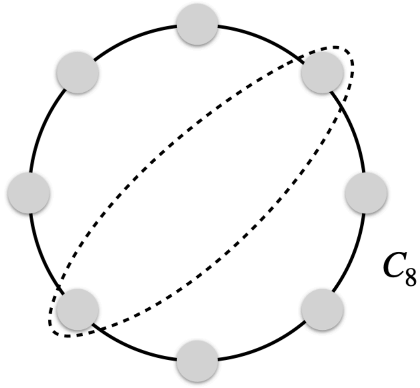
Jedoch gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[\{KK\}] = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]\,.$$

Somit sind A, B und C nicht unabhängig.

Interactive Example (Blackboard)

Consider the cycle graph C_n. Two vertices are chosen randomly. What is the probability that they are neighbors?



Note that choosing vertex 1 and 2 is the same Ereignis as choosing vertex 2 and 1.

$$\Omega = \{\{i,j\} \mid i,j \in [n],\ i \neq j\}$$

$$|\Omega| = \binom{n}{2}$$

A = " two vertices are neighbors "

$$A = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1,n\}, \{n,1\}\}$$

$$|A| = n$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{n}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

Beispiel 1.19. Ein Raum enthält N Personen.

- ▷ Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei davon am gleichen Tag Geburtstag haben?
- ▷ Wie gross muss N sein, damit diese Wahrscheinlichkeit grösser als 0.5 ist?

Sei $t_n \in \{1, \ldots, 365\}$ der Geburtstag der n-ten Person, wobei wir Schaltjahre der Einfachheit halber ignorieren.

Ein Elementarereignis ist eine Folge $\omega = (t_1, \ldots, t_N)$ und wir nehmen an, alle diese ω seien gleich wahrscheinlich. Für den Grundraum gilt $|\Omega| = 365^N$.

ask

▷ Sei $A = \{\text{mind. zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |A^\complement| &= |\{\text{alle Personen haben verschiedene Geburtstage}\}| \\ &= 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365-N)!} \end{aligned}$$

Und somit

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^\complement] = 1 - \frac{|A^\complement|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{365^N \cdot (365-N)!}.$$

$(N = 23 : \mathbb{P}[A] \approx 0.5073)$