Algorithms and Probability

Week 9

Georg Hasebe — 25/04/2024

Exercise Sheet 4

Aufgabe 1 – *Couch to k k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens $\frac{3}{4}$ aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schnieft* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph $G = (V, E)$ ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung $v \in V$ und die Route ist ein gegebener Kreis $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = v)$ der Länge k.

Bei jeder Strasse $e \in E$ gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

(a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

Satz 2.67. *(Ungleichung von Markov)* Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$.

(b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

Satz 2.68. *(Ungleichung von Chebyshev)* Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \leq 1/t^2$.

(c) Nimm an, dass du $n-1$ Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schniefender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt $k \geq \log_2(n) + 1$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen einzigen schniefenden Hund.

(d) Nimm an, dass $k = 1000\log_2 n$ und $n \geq 2$. Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

Satz 2.70 (Chernoff-Schranken). Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ and $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$:

(i) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\,\mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(ii) $\Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2\,\mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

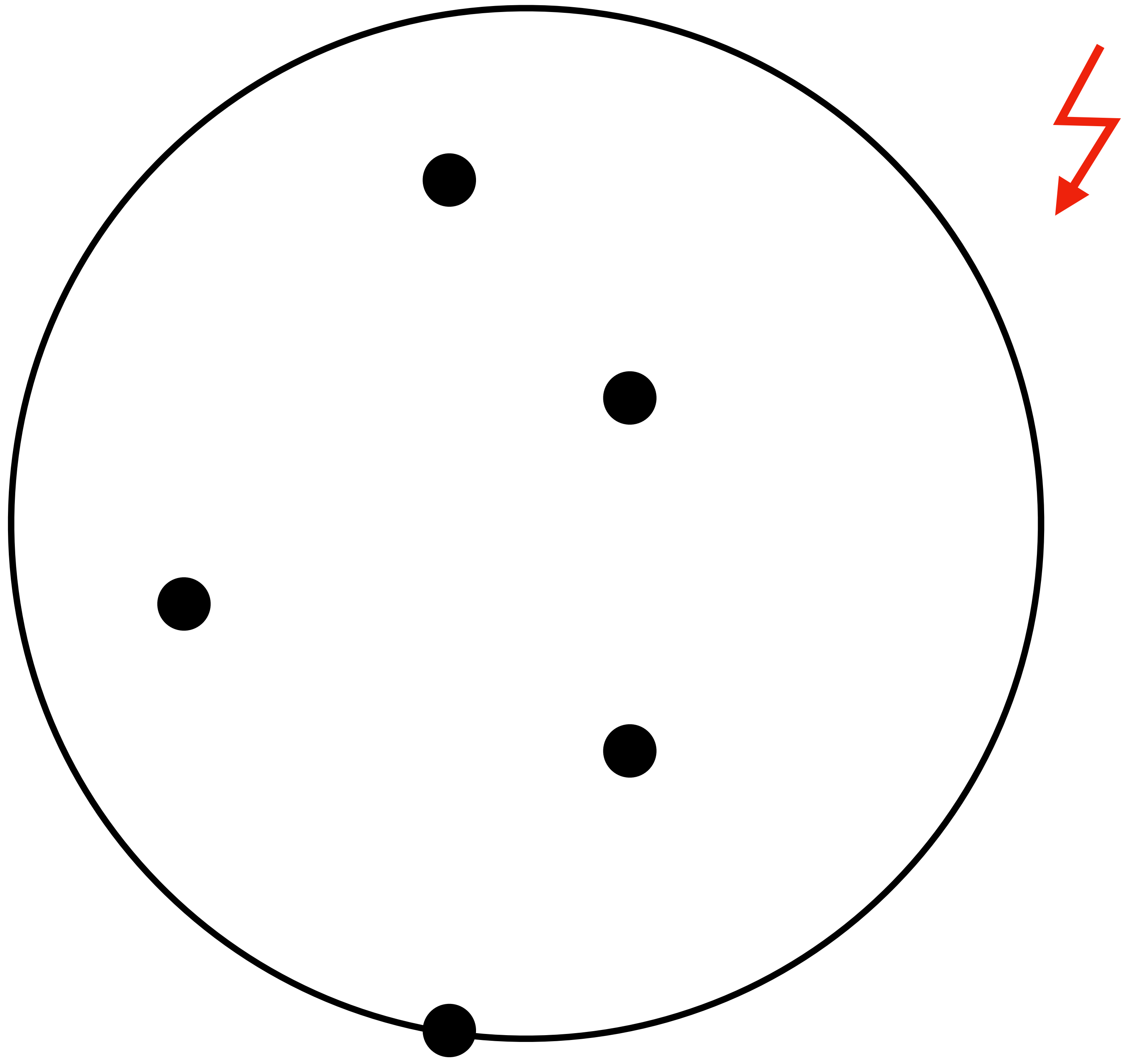
(iii) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$.

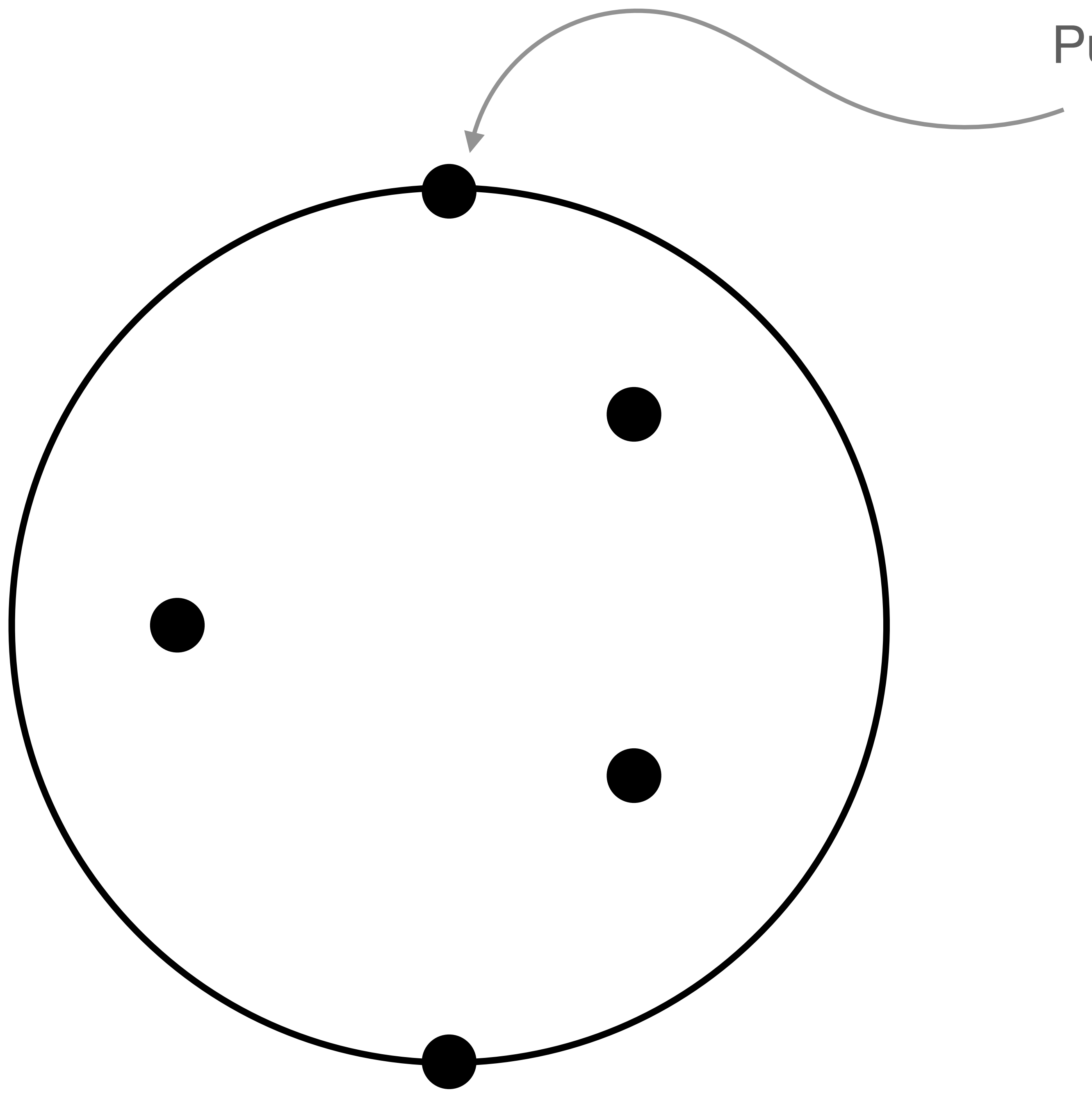
Theory Recap

Kleinster umschliessender Kreis

Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene.

Gesucht: kleinster Kreis $C(P)$, der alle Punkte aus P umschliesst.





Kleinster umschliessender Kreis

1. Existiert so ein Kreis immer?
2. Ist so ein Kreis auch eindeutig?

Lemma 3.25. Für jede (endliche) Punktemenge P im $\mathbb{R}^2$ gibt es einen eindeutigen kleinsten umschliessenden Kreis C(P).

3. Wie viele Punkte enthält der Rand des Kreises?

Lemma 3.26. Für jede (endliche) Punktemenge P im $\mathbb{R}^2$ mit $|P| \geq 3$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq P$, so dass $|Q| = 3$ und $C(Q) = C(P)$.

Mit anderen Worten: 3 Punkte $Q = \{p, q, r\}$ reichen aus, um den Kreis $C(Q) = C(P)$ eindeutig zu definieren.

Kleinster umschliessender Kreis

Lemma 3.26. Für jede (endliche) Punktemenge P im $\mathbb{R}^2$ mit $|P| \geq 3$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq P$, so dass $|Q| = 3$ und $C(Q) = C(P)$.

Aus diesem Lemma kann sofort ein $O(n^4)$ Algorithmus abgeleitet werden:

```
COMPLETEENUMERATION(P)
for all Q ⊆ P mit |Q| = 3 do
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
```

$C^{\bullet}$ ist die von C umschlossene Kreisscheibe, inklusive C.

Kleinster umschliessender Kreis

Randomised_PrimitiveVersion(P)

repeat forever
    wähle $Q \subseteq P$ mit $|Q| = 3$ zufällig und gleichverteilt
    bestimme $C(Q)$
    if $P \subseteq C^{\bullet}(Q)$ **then**
        return $C(Q)$

Erster randomisierter Algorithmus, stellt aber keine Verbesserung da (siehe Skript).

Kleinster umschliessender Kreis

$\textsc{Randomised\_CleverVersion}(\mathrm{P})$

repeat forever
  wähle $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{P}$ mit $|\mathrm{Q}| = 11$ zufällig und gleichverteilt
  bestimme $\mathrm{C}(\mathrm{Q})$
  if $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{C}^{\bullet}(\mathrm{Q})$ **then**
    return $\mathrm{C}(\mathrm{Q})$
  verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von $\mathrm{C}(\mathrm{Q})$

Kleinster umschliessender Kreis

Prof. Emo Welzl (AlgoWahr FS24).

```
RANDOMISED_CLEVERVERSION(P)
repeat forever
    wähle Q ⊆ P mit |Q| = 11 zufällig und gleichverteilt
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
    verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von C(Q)
```

Kleinster umschliessender Kreis

Verdopplung: Array num$[n]$, sodass num$[i]$ Anzahl Kopien des i-ten Punktes.

Liegt also p_i nicht in $C(Q)$ setzen wir num$[i] \leftarrow 2 \cdot$ num$[i]$.

RANDOMISED_CLEVERVERSION(P)

```
repeat forever
    wähle Q ⊆ P mit |Q| = 11 zufällig und gleichverteilt
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
    verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von C(Q)
```

Kleinster umschliessender Kreis

Zufällig/Gleichverteilt: Anzahl Punkte ergibt sich aus $N := \sum_{i=1}^{n} \text{num}[i]$.

Wir wollen p_i aus $\{p_1, \ldots, p_n\}$, so dass $\Pr[\text{"ziehe } p_i\text{"}] = \text{num}[i]/N$.

```
k ← UNIFORMINT(1, N)
x ← 1
while ∑_{i=1}^{x} n_i < k do
    x ← x + 1
return x
```

$n_i = \text{num}[i]$

Beweis. $x = i$ für genau

$$k \in \{1 + \sum_{i=1}^{x-1} \text{num}[i], \ldots, \sum_{i=1}^{x} \text{num}[i]\},$$

also $\text{num}[i]$ der N möglichen Werte.

Kleinster umschliessender Kreis

RANDOMISED_CLEVERVERSION(P)

repeat forever
  wähle $Q \subseteq P$ mit $|Q| = 11$ zufällig und gleichverteilt
  bestimme $C(Q)$
  if $P \subseteq C^\bullet(Q)$ **then**
    return $C(Q)$
  verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von $C(Q)$

Was wir bisher eingesehen haben:

1. Wir können eine Verdopplung leicht implementieren.
2. Wir können, trotz Verdopplung, zufällig und gleichverteilt Punkte wählen.

Was wir noch nicht wissen:

- Was ist die erwartete Laufzeit?

Laufzeit

P, Menge von Punkten mit $|P| = n$.

R, Menge von $|R| = r$ Punkten aus P.

$X :=$ "Anzahl Punkte ausserhalb von $C(R)$".

Zu zeigen: $\mathbb{E}(X) \leq 3\dfrac{n}{r+1}$.

$$\text{out}(p, R) := \begin{cases} 1 & p \notin C^{\bullet}(R) \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

$$\text{essential}(p, R) := \begin{cases} 1 & C(Q \backslash \{p\}) \neq C(Q) \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für $p \notin R$:

$$\text{out}(p, R) = 1 \Leftrightarrow \text{essential}(p, R \cup \{p\}) = 1$$

cont'd on blackboard.

Laufzeit

Gezeigt: $\mathbb{E}(X) \leq 3\dfrac{n}{r+1}$.

Zu zeigen: $\mathbb{E}(X) \geq 2^{k/3}$.

Sei $Q_0 \subseteq P, |Q_0| = 3$ so dass $C(Q_0) = C(P)$ (existiert nach Lemma 3.26). Nach k Runden existiert $p \in Q_0$, so dass p in mind. $k/3$ Runden ausserhalb von Q lag.

cont'd on blackboard.

Gezeigt: $\mathbb{E}(X) \leq 3\frac{n}{r+1}$.

Laufzeit

Gezeigt: $\mathbb{E}(X) \geq 2^{k/3}$.

Es gilt also:

$$2^{k/3} \leq \mathbb{E}(X) \leq 3\frac{n}{r+1}.$$

Sei $X_k :=$ "Anzahl Punkte nach k Iterationen".

Zu zeigen: $\mathbb{E}(X_k) \leq \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right)^k \mathbb{E}[X_{k-1}]$.

cont'd on blackboard.

Laufzeit

Gezeigt:

$$2^{k/3} \leq \mathbb{E}(X) \leq 3\frac{n}{r+1}.$$

Gezeigt:

$$\mathbb{E}(X_k) \leq \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right)^k \mathbb{E}[X_{k-1}].$$

Zu zeigen: Laufzeit in $O(n \log n)$

cont'd on blackboard.

Laufzeit

Satz 3.29. Algorithmus RANDOMIZED_CLEVERVERSION berechnet den kleinsten umschliessenden Kreis von P in erwarteter Zeit $O(n \log n)$.

RANDOMISED_CLEVERVERSION(P)

```
repeat forever
    wähle Q ⊆ P mit |Q| = 11 zufällig und gleichverteilt
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
    verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von C(Q)
```