Kopien von p_i

p_1 p_2 p_3 p_4

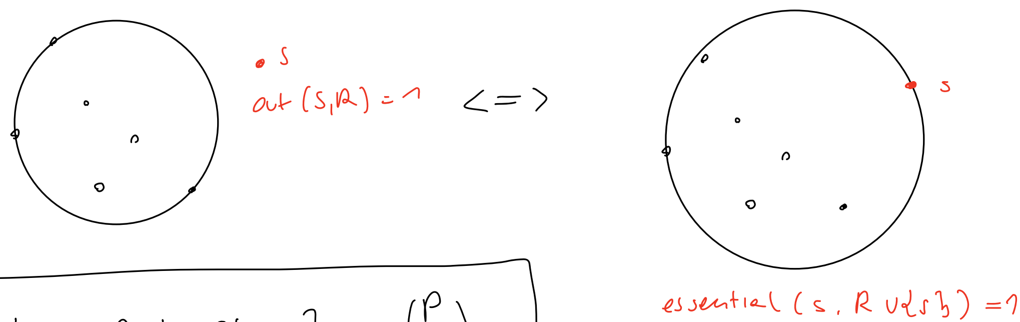
$n = 4$

$N = 8$

$k = 2, 3, 4, 5, \cancel{6}$

$x = 2 \quad (3)$

```
while Σ_{j=1}^{x} n_j < k do
    x ← x + 1
return x
```



$$R \in \{S \subseteq P \mid |S| = r\} = \binom{P}{r}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{s \in P \setminus R} \text{out}(s, R)$$

Punkte $p \in R$ sowieso $p \in C^\circ(R)$

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{s \in P \setminus R} \text{essential}(s, R \cup \{s\})$$

Lemma 3.26

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} \underbrace{\sum_{p \in Q} \text{essential}(p, Q)}_{\leq 3}$$

$$\leq \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} 3 = 3 \cdot \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = 3 \, \frac{n-r}{r+1}$$

$$\leq 3 \, \frac{n}{r+1}.$$

$\square$

$$\mathbb{E}[X_k] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_k \mid X_{k-1} = t] \cdot \Pr[X_{k-1} = t] \qquad \text{(Satz 2.32)}$$

$$\leq \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + 3\frac{t}{r+1}\right) \Pr[X_{k-1} = t]$$

$$= \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right) \sum_{t=0}^{\infty} t \Pr[X_{k-1} = t]$$

$$= \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right) \mathbb{E}[X_{k-1}]$$

Per Induktion folgt $\mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right)^k X_0$
$= \left(1 + 3\frac{1}{r+1}\right)^k n$

Sei $Q_0 \subseteq P$, $|Q_0| = 3$ so dass $C(Q_0) = C(P)$.

Falls nach k Runden noch nicht terminiert,

existiert $p \in Q_0$ so dass p in mind. $k/3$ Runden

ausserhalb von Q war.

Angenommen für alle $p \in Q_0$ gilt, p war

in weniger als $k/3$ Runden ausserhalb von Q.

Dann muss es mind. eine Runde geben,

in der alle $p \in Q_0$ in Q waren. $\lightning$

(sonst schon terminiert)

$X_k :=$ # Punkte nach k Iterationen

$$2^{k/3} \cdot Pr(T \geq k] \leq \mathbb{E}(X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k n$$

Für $r = 11$

$$2^{k/3} \cdot Pr(T \geq k] \leq \mathbb{E}(X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{12}\right)^k n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{k/3} \cdot Pr(T \geq k] \leq \left(1 + \frac{3}{12}\right)^k n$$

$$\Leftrightarrow \quad Pr[T \geq k] \leq \frac{\left(1 + \frac{3}{12}\right)^k}{2^{k/3}} n$$

$$\Leftrightarrow \quad Pr[T \geq k] \leq \underbrace{\left(\frac{\left(1 + \frac{3}{12}\right)}{2^{1/3}}\right)}_{\approx 0.992}^k n \leq 0.995^k \cdot n$$

für welches k_0 gilt $0.995^{k_0} = \frac{1}{n}$?

$$0.995^{k_0} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_0 = \log_{0.995}\left(\frac{1}{n}\right) = \log_{0.995} 1 - \log_{0.995} n$$

$$= -\log_{0.995} n$$

$$= -\frac{\ln n}{\ln 0.995} \leq 200 \ln n.$$

$T =$ " # Iterationen "

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} Pr[T \geq k] \qquad \text{(Satz 2.30)}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} \underbrace{Pr[T \geq k]}_{\leq 1} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \underbrace{Pr[T \geq k]}_{\leq 0.995^k \cdot n}$$

$$\leq k_0 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 0.995^k \cdot n$$

$$= k_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{0.995^{k_0} \cdot n}_{1} \cdot 0.995^k$$

$$= k_0 + O(1)$$

$$\left(\text{Geometrische Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} 0.995^k = \underbrace{\frac{1}{1-0.995}}_{\text{Konstante}} \right)$$

$$\leq 200 \log n + O(1)$$

Iterationen

Jede Iteration in $O(n)$ $\Longrightarrow$ gesamte Laufzeit $O(n \log n)$.