Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \max(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$.

X FALSE

flip fair coin, person A bets on heads, person B on tails. Winner gets 100 CHF.

X : CHF A wins

Y : CHF B wins

$\mathbb{E}[\max(X,Y)] = 100$ CHF but $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$

and therefore $\max(\mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[X]) = 50$.

Seien X und Y zwei Zufallsvariabeln mit $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Dann sind X und Y unabhängig.

X FALSE

Satz 2.61

Die Umkehrung stimmt, jedoch ist Unabhängigkeit eine stärkere Eigenschaft.

Zum Beispiel sei X eine Zufallsvariable, die die Werte $-1, 0, 1$ jeweils mit W'keit $1/3$ annimmt, und

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{falls } X = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $X * Y = 0$ und $\mathbb{E}[X] = 0$, und daher $\mathbb{E}[XY] = 0 = \mathbb{E}[X] * \mathbb{E}[Y]$, aber X und Y sind nicht unabhängig.

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $Var(X) = 1$ und $Var(Y) = 4$.

Dann ist $Var(X - Y) = -3$.

X FALSE

Definition 2.39. Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* Var[X] durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Grösse $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heisst *Standardabweichung* von X.

$\mathrm{Var}[X] \geq 0$!

Seien X, Y, Z drei Zufallsvariabeln wobei X, Y unabhängig sind, dann gilt immer

$$E[X + Y \cdot Z] = E[X] + \underbrace{E[Y] \cdot E[Z]}$$

X FALSE

$Y \cdot Z$ unabhängig !

Satz 2.60

Satz 2.61

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr(X = x)$$

$$= 1000 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$= 500$$

$S \xrightarrow{1/2} K \longrightarrow 1000$ k

$S \xrightarrow{1/2} Z \longrightarrow 0$ k

Sarah besitzt zwei sehr spezielle Münzen: eine zeigt immer 'Kopf' (weil auf beiden Seiten 'Kopf' abgebildet ist ...), die andere immer 'Zahl'. Sie wählt eine der beiden Münzen zufällig und wirft sie $n = 1000$ mal. Sie bezeichnet mit X die Anzahl 'Kopf' die sie sieht.

Dann gilt für $\delta := 1/4$:

$$\Pr[X \geq (1+\delta)n/2] \leq e^{-\delta^2 n/6}.$$

x FALSE

Wenn Sarah die erste Münze benutzt, ist der Erwartungswert n. Benutzt sie die zweite, ist der Erwartungswert 0. In beiden Fällen kann man den Term $n/2$ in der Formel also nicht mit der Chernoff-Ungleichung rechtfertigen. Tatsächlich ist aufgrund dieser Überlegung $\Pr[X \geq (1+\delta)n/2] = 1/2 > e^{-\delta^2 n/6}$.

Man kann sich natürlich auf den Standpunkt stellen, dass jeder Münzwurf W'keit $1/2$ hat, Kopf zu zeigen, und dass $X = X_1 + \cdots + X_n$ daher als die Summe von Bernoulli-zufallsvariablen mit Parameter $1/2$ ist (wobei X_i der Indikator für 'Kopf' in der i-ten Münze ist). Das ist korrekt, rechtfertigt aber ebenfalls nicht die Anwendung der Chernoff-Schranke, weil die Münzwürfe nicht unabhängig sind. Zeigt der erste Münzwurf Kopf, so zeigen alle anderen auch Kopf.

Ein deterministischer Algorithmus kann immer als randomisierter Algorithmus gesehen werden.

✓ TRUE

Wir können jeden Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit T, in einen randomisierten Algorithmus mit Laufzeit höchstens $10T$ und Erfolgswahrscheinlichkeit mindestens 0.9 umwandeln.

✓ TRUE

X Zufallsvariable der Laufzeit von A, s.d. $\mathbb{E}[X] = T$

Da $X \geq 0 \overset{\text{Markov}}{\Longrightarrow} Pr[X \geq 10T] \leq \frac{T}{10T} = 0.1$

breche nach $10T$ ab $\Rightarrow$ 0.9 Erfolgswsht.

Sei T' die tatsächliche Laufzeit des Algorithmus A.

Da $T' \geq 0$ gilt mit der Markov Ungleichung

$Pr[T' \geq 10T] \leq 0.1$.

Wenn wir den Algorithmus A also nach $10T$ abbrechen, erhalten wir einen Las Vegas Algorithmus mit Erfolgswahrscheinlichkeit mindestens 0.9.

Der randomisierte Algorithmus A löst Problem P mit Wahrscheinlichkeit p, und gibt sonst aus: "Keine Antwort". Wie oft müssen wir A im Erwartungswert laufen lassen, bis er Problem P löst?

Bitte stellen sie sicher, dass ihre Antwort keine Leerzeichen enthält.

1/p

Ausführen bis zum ersten Erfolg $\sim$ Geo(p)

$\mathbb{E}[..] = 1/p$.

Jeder Monte Carlo Algorithmus kann in einen Las Vegas Algorithmus umgewandelt werden.

X FALSE

Wir können die Erfolgswahrscheinlichkeit des Monte Carlo Algorithmus M beliebig nah an 1 bekommen, indem wir den Algorithmus wiederholt anwenden und am Ende die häufigste Antwort ausgeben. Allerdings können wir die Wahrscheinlichkeit von exakt 1 nicht erreichen: Sei n die Anzahl der Wiederholungen mit der wir den Algorithmus ausführen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass wie **nie** die Richtige Lösung sehen(also sicher auch nicht ausgeben

$Pr[failM]^n$>0.

Eine kleine Fehlerwahrscheinlichkeit bleibt also immer.

Wir betrachten eine Variante des Target Shooting Algorithmus, den wir in der Vorlesung gesehen haben. Bitte beachten Sie, dass es sich nicht um genau den gleichen Algorithmus handelt. Wir gehen, wie in der Vorlesung davon aus, dass es eine unbekannte Menge S gibt, die Teilmenge einer bekannten Menge U ist. Ausserdem können wir Elemente $u \in U$ uniform zufällig auswählen und überprüfen, ob $u \in S$.

Angenommen, wir wählen so oft zufällige Elemente $u \in U$ aus, bis wir insgesamt 100 Elemente gesehen haben, die $u \in S$ erfüllen. Sei X die Anzahl an Elementen, die wir auswählen müssen, bis das zutrifft.

- X ist geometrisch verteilt.
- Falls $|S| = |U|$, dann $X = 100$.
- (*) $\mathbb{E}[X] = 100|U|/|S|$.
- Falls $X = 100$, dann $|S| = |U|$.

(*) $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $X_i \sim Geo\left(\frac{|S|}{|U|}\right)$, $\mathbb{E}[X_i] = \frac{|U|}{|S|}$ ...

Gegeben Mengen $S \subset U$ wobei die Grösse von U mit $|U| = 10^8$ bekannt ist. Wir wollen die Grösse von S mit Hilfe von Target Shooting abschätzen. Wir wählen N Elemente aus U unabhängig von einander und zählen, wie vieler dieser Elemente auch in S sind. Wir bezeichnen diese Grösse mit Z.

Wenn $|S| = 10^3$ und $N = 10^6$ dann erwarten wir...

- $\mathbb{E}[Z] = 10^0$ Elemente in S. ✗
- $\mathbb{E}[Z] = 10^3$ Elemente in S. ✗
- $\mathbb{E}[Z] = 10^1$ Elemente in S. ✓
- $\mathbb{E}[Z] = 10^2$ Elemente in S. ✗

Z can be seen as a sum of N indep. ind. variables with $p = |S|/|U| \Rightarrow \mathbb{E}[Z] = Np = 10^6 \cdot \frac{10^3}{10^8} = \underline{10^1}$