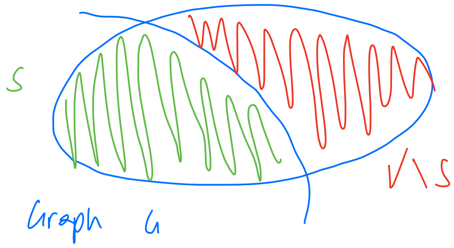
Aufgabe 1 – *Zufällige Schnitte*

(a) Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten betrachten wir den Laplace-Raum $\Omega = \{S \mid S \subseteq V\}$ und die Zufallsvariable $X :=$"Anzahl Kanten über den Schnitt $(S, V \setminus S)$".

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Hinweis: Schreiben Sie X als Summe von geeigneten Indikator Zufallsvariablen.

Sei $u \in V$. $\Pr[u \in S] = \Pr[u \notin S] = 1/2$



u is either in S or V\S.

Using the hint we get:

Sei X_e eine Indikator variable s.d.

$$X_e = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in E(S, V \setminus S) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kante über dem Schnitt $(S, V \setminus S)$

$$\mathbb{E}[X_e] = \sum_{x \in W_{X_e}} x \cdot \Pr(X_e = x] = 1 \cdot \Pr[X_e = 1] + 0 \cdot \Pr[X_e = 0]$$

$$= \Pr[u \in S \wedge v \notin S] + \Pr[u \notin S \wedge v \in S] - \underbrace{\Pr[u \in S \wedge v \notin S \wedge u \notin S \wedge v \notin S]}_{0}$$

$$= \frac{2^{|V|-2}}{|\Omega|} + \frac{2^{|V|-2}}{|\Omega|} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Mit $X = \sum_{e \in E} X_e$ und der Linearität von $\mathbb{E}$ folgt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[X_e] = \frac{m}{2}.$$

(b) Da $\mathbb{E}[X] = m/2$ muss $\omega \in \Omega$ existieren s.d. $X(\omega) \geq m/2$. Es gibt also $S \subseteq V$ s.d. über $(S, V \setminus S)$ mind. $m/2$ Kanten liegen.

Proof. Assume there is no $\omega \in \Omega$ s.t. $X(\omega) \geq \frac{m}{2}$. Let $x_{max} < \frac{m}{2}$ be the largest $X(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$, we have

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr(X = x) \leq \sum_{x \in W_X} x_{max} \cdot Pr[X = x]$$

$$= x_{max} \underbrace{\sum_{x \in W_X} Pr(X = x)}_{1} = x_{max}$$

Therefore $\mathbb{E}[X] \leq x_{max} < \frac{m}{2}$, contradiction.

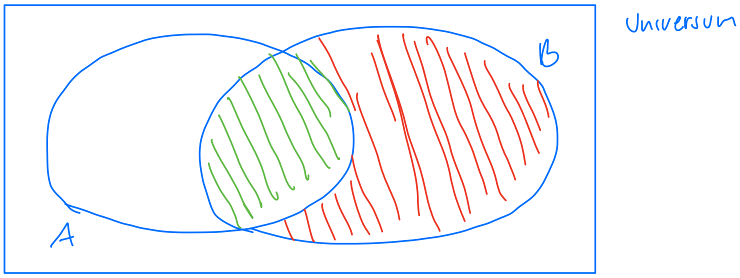
Aufgabe 2 – *Unabhängigkeit*

Seien A und B zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann

(i) $\bar{A}$ und B,

Wir wissen $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$

Wir schreiben $B = (A \cap B) \uplus (\bar{A} \cap B)$



$A \cap B \uplus \bar{A} \cap B = B$

$$
\begin{aligned}
\Pr[\bar{A} \cap B] &= \Pr[B] - \Pr[A \cap B] \\
&= \Pr[B] - \Pr[A] \cdot \Pr[B] \\
&= \Pr[B](1 - \Pr[A]) \\
&= \Pr[B] \cdot \Pr[\bar{A}] .
\end{aligned}
$$

(ii) A und $\bar{B}$, sowie

$$A = (A \cap B) \uplus (A \cap \bar{B}) \quad \ldots$$

(iii) $\bar{A}$ und $\bar{B}$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\begin{aligned}
Pr[\bar{A} \cap \bar{B}] &= 1 - Pr[A \cup B] \\
&= 1 - (Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]) \\
&= 1 - Pr[A] - Pr[B] + Pr[A] \cdot Pr[B] \\
&= (1 - Pr[A])(1 - Pr[B]) \\
&= Pr[\bar{A}] \cdot Pr[\bar{B}] .
\end{aligned}$$