11.04.2024

ERWARTUNGSWERT BERNOULLI

$X \sim Ber(p)$

$$\mathbb{E}[X] \overset{Def.}{=} \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr[X = x] = 1 \cdot Pr[X=1] + 0 \cdot Pr[X=0]$$

$$= Pr[X=1] = p.$$

ERWARTUNGSWERT BINOMIAL

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$\mathbb{E}[X] \overset{\text{Def. 2.17}}{=} \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \Pr[X=x]$$

$$\overset{X\sim \mathrm{Bin}}{=} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(*) Notice that $k\binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{Bin. Theorem}}{=} np \underbrace{(p+(1-p))^{n-1}}_{1^{n-1}} = np.$$

BEISPIEL BINOMIAL

Fünf faire Münzen werden geworfen. Sei X die Zufallsvariable, die zählt, wie oft Kopf erscheint. Bestimmen Sie den Wert $f_X(3)$ und erklären Sie, wie sie auf diesen Wert gekommen sind.

$$P[X=3] = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}.$$

ERWARTUNGSWERT GEOMETRISCH

$X \sim \text{Geo}(p)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X=k]$$

$$\overset{X \sim \text{Geo}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$\overset{q=1-p}{=} p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

VERTEILUNGSFUNKTION GEOMETRISCH

$X \sim \text{Geo}(p)$

$$F_X(n) = \Pr[X \leq n] = \sum_{k=1}^{n} \Pr[X=k] = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} \overset{(*)}{=} p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k$$

(*) Geometric series (see Wikipedia)

BEISPIEL GEOMETRISCH

Eine Urne enthält N weisse und M schwarze Bälle. Es werden zufällig Bälle aus der Urne gezogen, bis ein schwarzer Ball gezogen wird. Ein gezogener Ball wird vor dem nächsten Zug zurückgelegt.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau n Züge notwendig sind?

X = # draws needed

$$p = \frac{M}{(M+N)}$$

p is the "Erfolgswahrscheinlichkeit"

M out of $(N+M)$ are Black!

$$\Pr[X=n] = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1}\left(\frac{M}{M+N}\right) = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n}$$

NEGATIV BINOMIAL

$Z \sim$ negativ binomial verteilt

Die Dichte von Z kann man mit etwas Nachdenken leicht herleiten. Dazu überlegen wir uns folgendes: Z bezeichnet die Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment. Wenn $Z = z$ ist, so wurden also genau n erfolgreiche und $z - n$ nicht erfolgreiche Experimente durchgeführt. Da nach Definition von Z das letzte Experiment erfolgreich sein muss, steht der Zeitpunkt des n-ten erfolgreichen Experimentes fest. Die übrigen $n-1$ erfolgreichen Experimente können beliebig auf die restlichen $z-1$ Experimente verteilt werden. Hierfür gibt es genau $\binom{z-1}{n-1}$ Möglichkeiten. Jede dieser Möglichkeiten tritt mit Wahrscheinlichkeit $p^n(1-p)^{z-n}$ ein. Für die Dichte von Z gilt also

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n(1-p)^{z-n}.$$

BEISPIEL COUPON-COLLECTOR

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

□ noch nicht im Besitz □ im Besitz

Phase 1 : □ □

X_1 = # runden bis wir □ bekommen

ziehen bis zum ersten Erfolg ~ Geo

$$X_1 \sim Geo(1)$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{1} = 1$$

Phase 1 : □ □

X_2 = # runden bis wir □ bekommen

$$X_2 \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{n-1}{n}$ since one card is already im Besitz

$$\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{(1/2)} = 2$$

$$\Longrightarrow X = X_1 + X_2$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 1 + 2 = \underline{3}$$

BEISPIEL BEDINGTE Z.V.

X_1 := Augenzahl des ersten Würfels
X_2 := Augenzahl des zweiten Würfels
X := Summe der Augenzahlen = $X_1 + X_2$

$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 3.5$

$\mathbb{E}[X] = 3.5 + 3.5 = 7.$

A = "X_2 ist gerade"

$$\mathbb{E}[X \mid A] \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \Pr[\omega]$$

$$= \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} \left(X_1(\omega) + X_2(\omega)\right) \Pr[\omega]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X_1(\omega) \Pr[\omega]}_{\mathbb{E}[X_1 \mid A]} + \underbrace{\frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X_2(\omega) \Pr[\omega]}_{\mathbb{E}[X_2 \mid A]}$$

$= \mathbb{E}[X_1]$ (*)

$$= \mathbb{E}[X_1] + 2 \cdot 6 \cdot \frac{(2+4+6)}{36} = 3.5 + 4 = \underline{7.5}$$

$$(*) \quad \Pr[X_1 = x \mid A] = \frac{\Pr[\{\omega \in A : X_1(\omega) = x\}]}{\Pr[A]} = \frac{\left(\frac{3}{18}\right)}{\left(\frac{18}{36}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$= \Pr[X_1 = x]$$

BEISPIEL MEHRERE Z.V.

$$\Pr[X = x, Y = y] = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{x}{y}}{2^x} & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ and } y \in \{0,1,\dots,x\} \\ 0, & x \notin \{1,2,3,4,5,6\} \text{ or } y \notin \{0,1,\dots,x\} \end{cases}$$

$$\Pr[Y = 6] = \sum_{x=1}^{6} \Pr[X = x, Y = 6]$$

$$= \frac{1}{6}\left(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2^8}\right)$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 2^8}$$

BEISPIEL UNAB. MEHRERE Z.V.

$\Omega = \{2,3\}$ mit $Pr[\omega] = 1/2$ für alle $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \text{ durch } 2 \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_X(i) = \begin{cases} 1/2 & \text{für } i=0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \text{ durch } 3 \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(i) = \begin{cases} 1/2 & \text{für } i=0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_{X,Y}(1,1) = 0 \neq f_X(1) \cdot f_Y(1)$

$\Rightarrow$ X und Y sind **nicht** unabhängig

WALDSCHE IDENTITÄT

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Die Ereignisse $N = n$ für W_N teilen den Wskt. Raum in disjunkte Teilmengen von Ω.

Verwende:

Satz 2.32. Sei X eine Zufallsvariable. Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ und $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{n \in W_N} \mathbb{E}[Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n]$$

fixes n !

$$\mathbb{E}[Z \mid N = n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \mathbb{E}[X]$$

X_i sind Kopien von X

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{n \in W_N} n \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \Pr[N=n] = \mathbb{E}[X] \cdot \sum_{n \in W_N} n \cdot \Pr[N=n]$$

$$= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[N].$$

$\square$

BEISPIEL WALDSCHE IDENTITÄT

$$\mathbb{E}[Y] \overset{\text{W.I.}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{N} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[\text{"Kopf"}]}_{X} = 3.5 \cdot 1/2 = 7/4 .$$