# Algorithms and Probability

## Week 6

Georg Hasebe — 27/03/2024

# Minitest 3

Wir betrachten den Laplaceraum mit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Seien $A = \{2, 3, 5, 7\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse passieren?

Angenommen, $G$ ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von $G$ ist gerade. Dann enthält $G$ ein perfektes Matching.

Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Wir werfen zunächst einen 6-seitigen Würfel und danach eine Münze. Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, K, Z\}$ beschreiben.

Sie nehmen an einer Quizshow mit 'Ja/Nein'-Fragen teil und wissen, dass die Fragen zufällig ausgewählt werden und Sie mit Wahrscheinlichkeit $p$ die Antwort wissen (und die Frage korrekt beantworten). Falls Sie die Antwort nicht wissen, wählen Sie eine der Antworten (uniform) zufällig aus. Wie hoch (in Abhängigkeit von $p$) ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die korrekte Antwort auf eine zufällige Quizfrage geben?

- $1/2$
- $1 - p/2$
- $p + (1 - p)/2$ ✓
- $p$

# Theory Recap 1

where we left off last time…

# Independence

**Definition 2.18.** Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[A] \cdot \Pr[B]}{\Pr[B]} = \Pr[A]$$

“[…] das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten.”, skript p. 101

# Interactive Example (Blackboard)

**Beispiel 1.38.** Eine Münze wird zweimal geworfen. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{\mathrm{ZZ}, \mathrm{ZK}, \mathrm{KZ}, \mathrm{KK}\}$.

Seien

$$A = \{\text{Kopf beim 1. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\}$$
$$B = \{\text{Kopf beim 2. Wurf}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}\,.$$

Sind $A$ und $B$ unabhängig?

# Interactive Example (Blackboard)

**Übung 1.39.** Wir werfen zwei voneinander unabhängige Würfel. Dies wird durch das Laplace-Modell des Grundraums modelliert $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Betrachten wir folgende Ereignisse

- ▷ $A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in 2\mathbb{N}\}$, *erste Augenzahl ist gerade*,
- ▷ $D = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 2\}$, *beide Augen sind höchstens 2*.

Sind $A$ und $D$ unabhängig?

# Independence

**Definition 2.22.** Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen $A_i$ mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

# Interactive Example (Blackboard)

**Beispiel 1.43.** Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

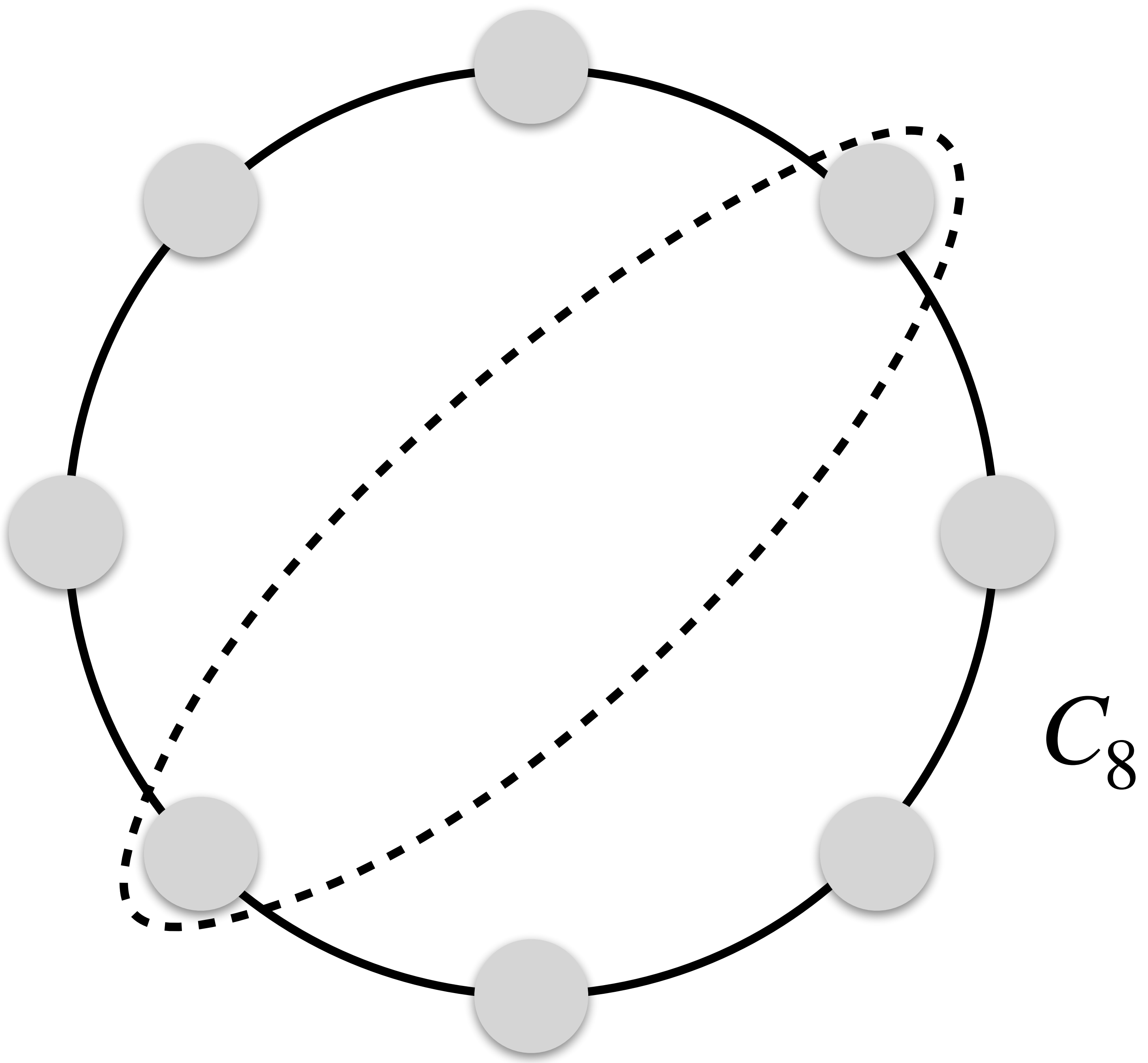
$$A = \{\text{Kopf bei Wurf 1}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\}\,,$$
$$B = \{\text{Kopf bei Wurf 2}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}\,,$$
$$C = \{\text{beide Würfe gleich}\} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZZ}\}\,.$$

Was kann man über die Un-/Abhängigkeit von $A, B$ und $C$ sagen?

Drei Ereignisse $A, B, C$ heissen unabhängig genau dann wenn $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]$.

# Interactive Example (Blackboard)

Consider the cycle graph $C_n$. Two vertices are chosen randomly. What is the probability that they are neighbors?




Note that choosing vertex 1 and 2 is the same Ereignis as choosing vertex 2 and 1.

# Interactive Example (Blackboard)

Given $n$ people, what is the probability that two of them share a birthday?

Assume every year has $365$. An Ereignis is of the form $\omega = \{t_1, \ldots, t_n\}$ where $t_i \in [365]$. Assume that every $\omega$ has the same probability.

# Interactive Example (Blackboard)

Given $n$ people, what is the probability that someone has birthday today?

Assume every year has $365$. An Ereignis is of the form $\omega = \{t_1, \ldots, t_n\}$ where $t_i \in [365]$. Assume that every $\omega$ has the same probability.

# Interactive Example (Blackboard)

Given $n$ people, what is the probability that someone has the same birthday as me?

Assume every year has $365$. An Ereignis is of the form $\omega = \{t_1, \ldots, t_n\}$ where $t_i \in [365]$. Assume that every $\omega$ has the same probability.

# Theory Recap 2

# Independence

**Lemma 2.24.** Seien $A$, $B$ und $C$ unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und $C$ bzw. $A \cup B$ und $C$ unabhängig.

cont'd on the blackboard.

Seien $A, B, C$ unabhängige Ereignisse mit $\Pr[A \cap B \cap C] > 0$. Welche der folgenden Gleichungen sind immer wahr?

$\Pr[A] + \Pr[B] \leq \Pr[A \cup B]$ ✗

$\Pr[A|B \cap C] = \Pr[A|B \cup C]$ ✓

$\Pr[(A \cup B) \cap C] = (\Pr[A] + \Pr[B]) \cdot \Pr[C]$ ✗

$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ ✓

Seien $A, B, C$ drei Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum mit $Pr[A], Pr[B], Pr[C] > 0$.

Falls $\mathrm{Pr}[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$, dann sind $A$ und $B$ unabhängig. ✓

Falls $A, B, C$ unabhängig sind, dann gilt $Pr[A \cap (B \cup C)] = Pr[A] \cdot Pr[B \cup C]$ ✓

Falls $Pr[A \cup B] = \mathrm{Pr}[A] + \mathrm{Pr}[B]$, dann $Pr[A \cap B] = 0$. ✓

Falls $Pr[A] \leq Pr[B]$, dann $Pr[A \cup C] \leq Pr[B \cup C]$. ✗

# Zufallsvariablen

**Definition 2.25.** Eine *Zufallsvariable* ist ein Abbildung $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $\Omega$ die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Der Wertebereich von $X$ ist definiert durch

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert } \omega \in \Omega \text{ so dass } X(\omega) = x\}.$$

Wenn $\Omega$ endlich [abzählbar] ist, ist $W_X$ endlich [abzählbar].

# Bespiel

Wir werfen eine ideale Münze dreimal. Die Zufallsvariable $Y$ bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis “Kopf”.

**Q:** Was ist $\Omega$?

**A:** $\Omega = \{K, Z\}^3$

**Q:** Was ist $Y(KZK)$ und $Y(KKK)$?

**A:** $Y(KZK) = 2$, $Y(KKK) = 3$

**Q:** Was ist $W_Y$ (Wertebereich von $Y$)?

**A:** $W_Y = \{0,1,2,3\}$

# Notation

Sei $X$ eine Zufallsvariable und sei $W_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Das Ereignis $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ wird oft mit der Schreibweise $X = x_i$ abgekürzt.

Damit wird $\Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}]$ zu $\Pr[X = x_i]$.

Analog: $\Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_i\}]$ gleich $\Pr[X \leq x_i]$ oder $\displaystyle\sum_{x \in W_X:\ x \leq x_i} \Pr[X = x]$.

Analog: $\Pr[X \geq x_i], \Pr[2 < X < 7], \Pr[X^2 \geq 2], \ldots$

# Dichte-/Verteilungsfunktion

Sei $X$ eine Zufallsvariable.

**Dichtefunktion** von $X$:

$$f_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

**Verteilungsfunktion** von $X$:

$$F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

# Beispiel

Wir werfen eine ideale Münze dreimal. Die Zufallsvariable $Y$ bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis “Kopf”.

**Q:** Was ist die Dichtefunktion $f_Y$ von $Y$?

**Q:** Was ist die Verteilungsfunktion $F_Y$ von $Y$?

**A:** (Blackboard)

**Dichtefunktion** von $X$:

$$f_X\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

**Verteilungsfunktion** von $X$:

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \le x]$$

# Erwartungswert

**Definition 2.27.** Zu einer Zufallsvariablen $X$ definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

From the official lecture slides: “Vorlesung: wir betrachten nur Zufallsvariablen für die der Erwartungswert existiert.”

# Erwartungswert

**Lemma 2.29.** Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Vergleich mit Def. 2.27: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x].$

Erinnerung 1: $\Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}].$

Erinnerung 2: $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$

Sei $\Omega = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$ ein Laplaceraum und sei $\omega$ ein (zufälliges) Elementarereignis in $\Omega$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[|\omega|]$.

# Beispiel

Wir werfen einen fairen Würfel. Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Augenzahl des Würfels. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Nach Lemma 2.29 gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega]$ und wir bekommen

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \{1,2,3,4,5,6\}} X(\omega) \Pr[\omega] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

# Erwartungswert

**Satz 2.33.** *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$ mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b.$$

Proof for $X = a_1X_1 + a_2X_2 + b$ on the blackboard.