(b) Geben Sie auch einen (effizienten) Algorithmus an, der eine Lösung berechnet. (Der also ausgibt, welche Karte Sie von welchem Stapel auswählen sollen, um eine vollständige Strasse zu erhalten.)

Hinweis: Obwohl die Fragestellungen scheinbar nichts mit Graphen zu tun haben, lässt sich das Problem als graphentheoretisches Problem formulieren. Geben Sie eine solche Formulierung an. Dazu müssen Sie insbesondere genau beschreiben, welchen Graphen $G = (V, E)$ Sie betrachten. (Was ist V? Was ist E?) Anschliessend können Sie beschreiben, was Sie über G wissen, und was Ihnen dieses Wissen über die ursprüngliche Fragestellung verrät. Dafür dürfen Sie in der Vorlesung beschriebene Algorithmen zitieren, selbst wenn dort die Implementierung nicht besprochen wurde. Achten Sie jedoch darauf, dass die Algorithmen in der Vorlesung nur für einfache Graphen beschrieben wurden.

Let $G = (V, E)$ where $V = (W \cup S)$ and

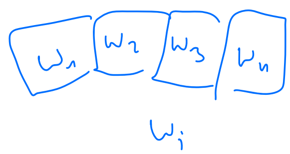
- W contains all 9 values (color irrelevent)

  $W = \{6, 7, 8, 9, 10, \text{Under}, \text{Ober}, \text{König}, \text{Ass}\}$

  U O K A

- S contains all 9 Stapel S_i, $i \in [9]$ s.t.

  $|S_i| = 4$

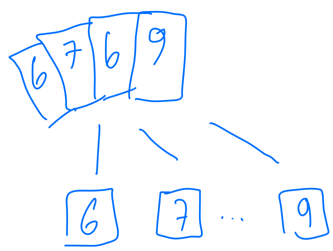


- $E = \{\{w, S_i\} \mid$ the value $w \in W$ appears in any color in $S_i\}$

Notice that there are only edges from W to S

therefore G is bipartite $G = (W \uplus S, E)$.

We want a Strasse by picking <u>one</u> edge from each of the Stapel.



In G this corresponds to a perfect matching.

Now notice that we can find a perfect matching – if existent – in G (bipartite) with Hopcroft-Karp.

To prove correctness we have to prove the existence of a perfect mat. in G.

Satz 1.52 (Satz von Hall, Heiratssatz). **Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$, wenn gilt**

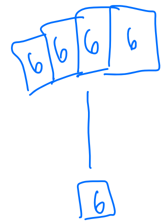
$$|N(X)| \geq |X| \quad \text{für alle } X \subseteq A. \tag{1.1}$$

We show $|N(X)| \geq |X|$ for all $X \subseteq W$, then there exists M s.t. $|M| = |W| = \frac{|W \uplus S|}{2} = 9$, a perfect matching.

(Correctness)

Proof. Let $X \subseteq W$. Since S contains all stacks, that contain all cards, the values of W must appear in the stacks of $N(X)$. Since each value appears in 4 colors, the number of cards in $N(x)$ must be at least $4|X|$.

not stacks!



$$|N(X)| = 4|X|$$
$$= 4 \cdot 1 \checkmark$$
$$X = \{6\}$$

At the other hand, every stack has exactly 4 cards, thus the number of cards in $N(X)$ is $4|N(X)|$.

We get

$$4|N(X)| \geq 4|X| \iff |N(X)| \geq |X|$$

for arbitrary $X \subseteq W$ which concludes our proof. $\square$

We use Hopcroft-Karp to obtain a perfect matching in G which (which always works) can be easily converted to a Strasse.

Aufgabe 1 – *Jass-Karten*

Ein Jass-Kartenspiel besteht aus 36 Karten mit vier Farben (Rosen, Schellen, Eichel, Schilten) und neun Werten (6, 7, 8, 9, 10, Under, Ober, König, Ass). Die Karten werden gemischt und zufällig auf 9 Stapel $S_1, \ldots, S_9$ mit je vier Karten aufgeteilt. Sie dürfen sich nun aus jedem Stapel eine Karte aussuchen. Können Sie die Wahl so treffen, dass Sie am Ende eine vollständige Strasse ausgewählt haben (also jeden der 9 Kartenwerte genau einmal)?

(a) Finden Sie einen Algorithmus, der als Input $S_1, \ldots, S_9$ (wie oben beschrieben) nimmt, und als Output angibt, ob eine solche Wahl möglich ist.

Hall ((b))

$\Longrightarrow$ print "YES"