Algorithms and Probability

Week 5

Georg Hasebe — 21/03/2024

Probability

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

Note that the set Ω must be countable. In this course we will use mostly finite Ω.

Example

We throw a single, six-sided fair dice once; we observe the number on top.

Q: What is the Ergebnismenge Ω?

A: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Q: How would you describe the Ereignis E "the dice shows an even number"?

A: $E = \{2,4,6\}$

Q: What is the probability of Ereignis E, i.e. $\Pr[E]$?

A: $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$

Probability

Lemma 2.2. Für Ereignisse A, B gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.

Probability

Satz 2.3 (Additionssatz). Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

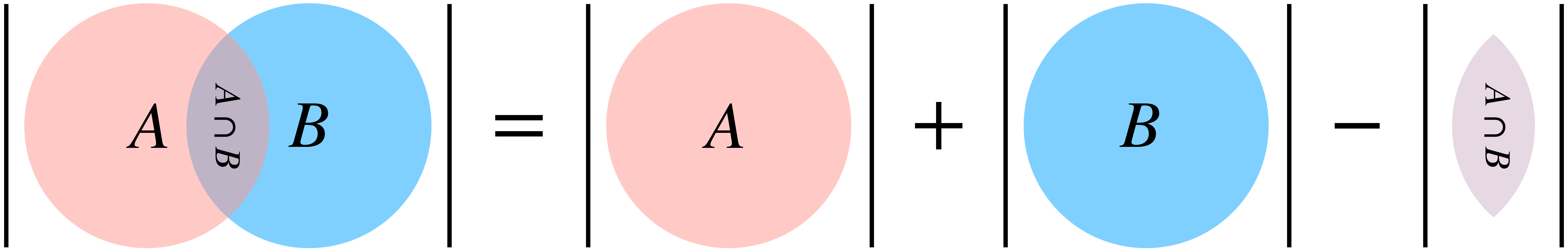
$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Korollar 2.6. *(Boolesche Ungleichung, Union Bound)* Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

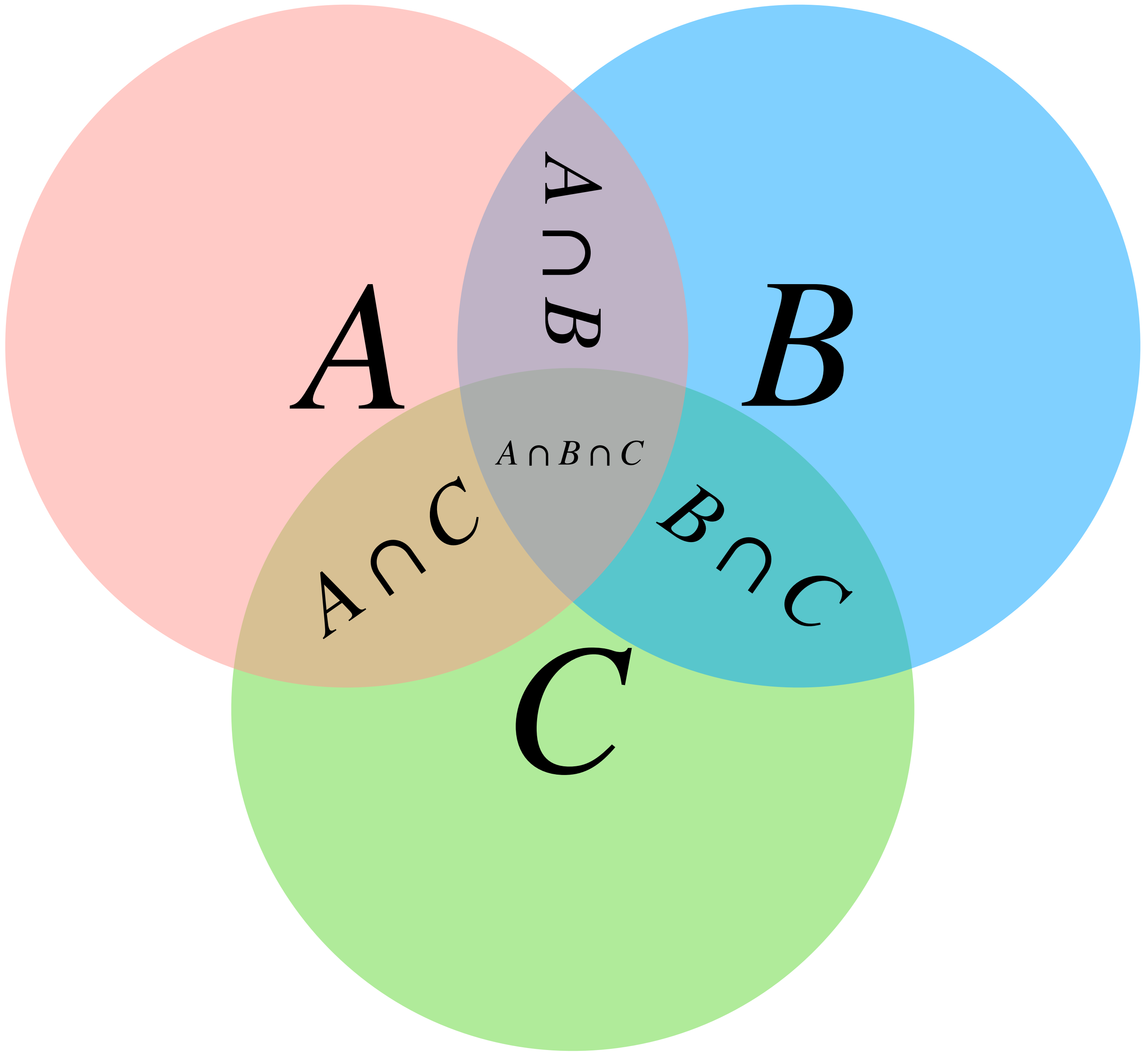
Siebformel

What is the cardinality of $A \cup B$, i.e. what is $|A \cup B|$?



We have $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Siebformel

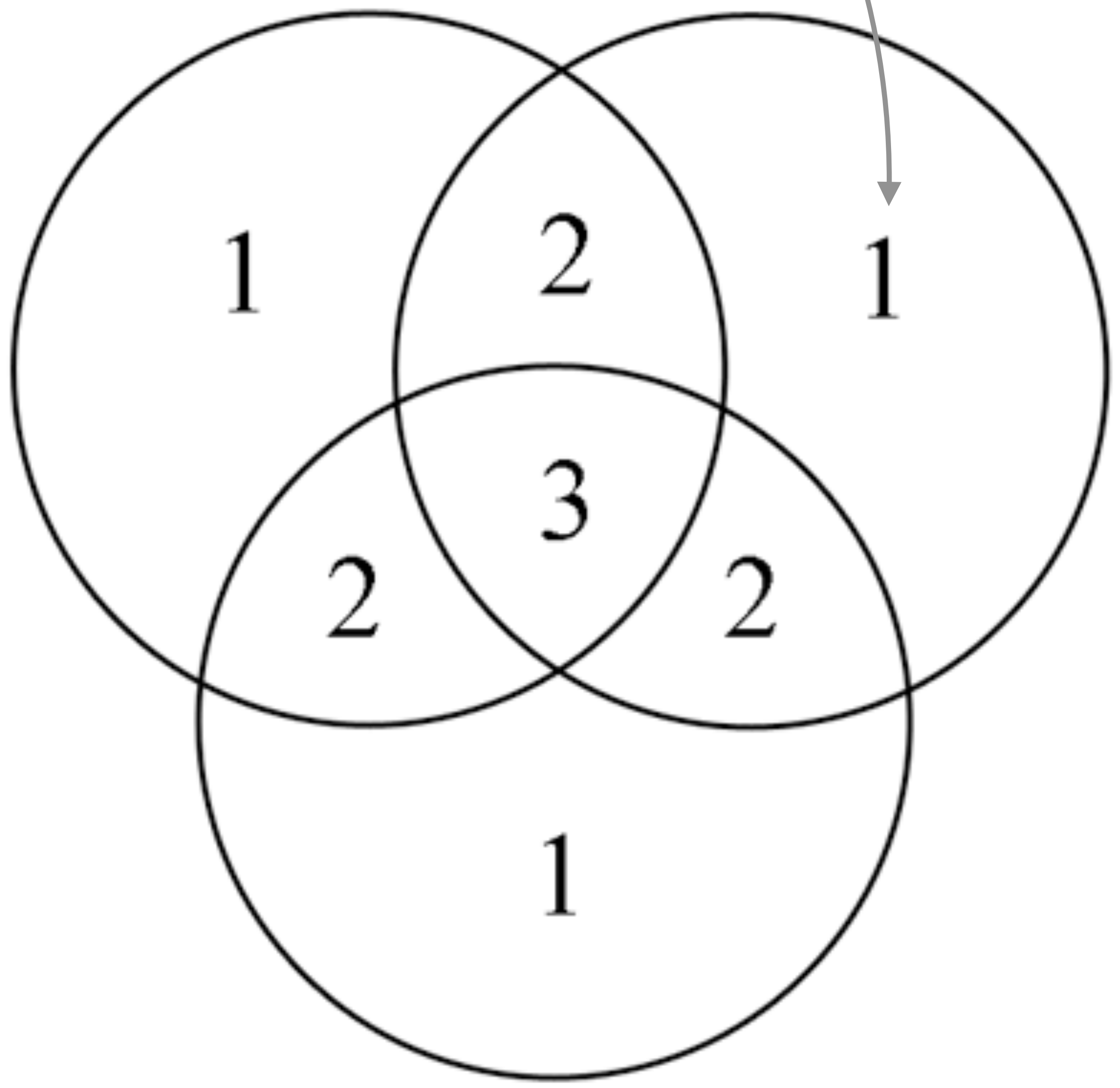


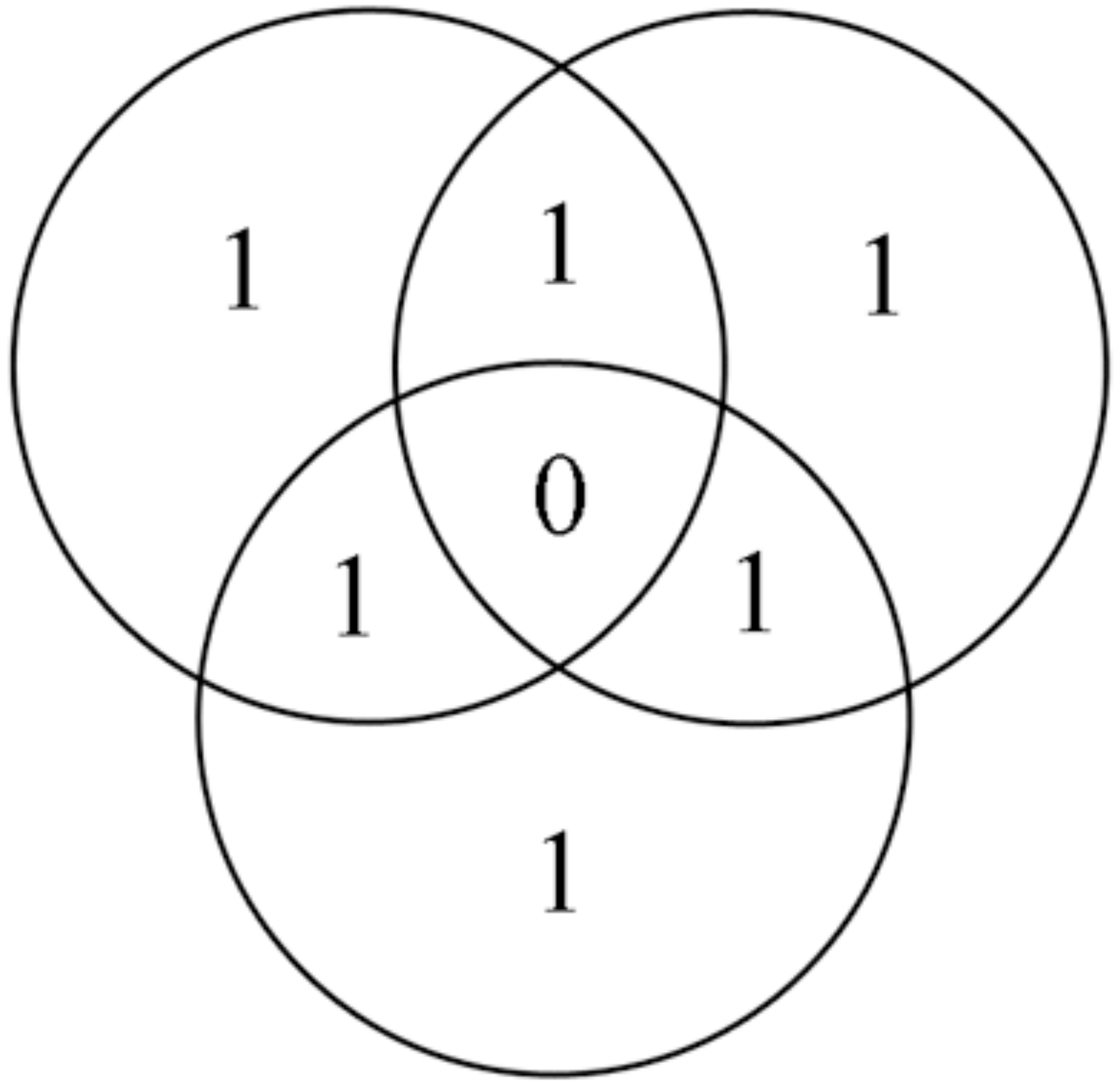
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

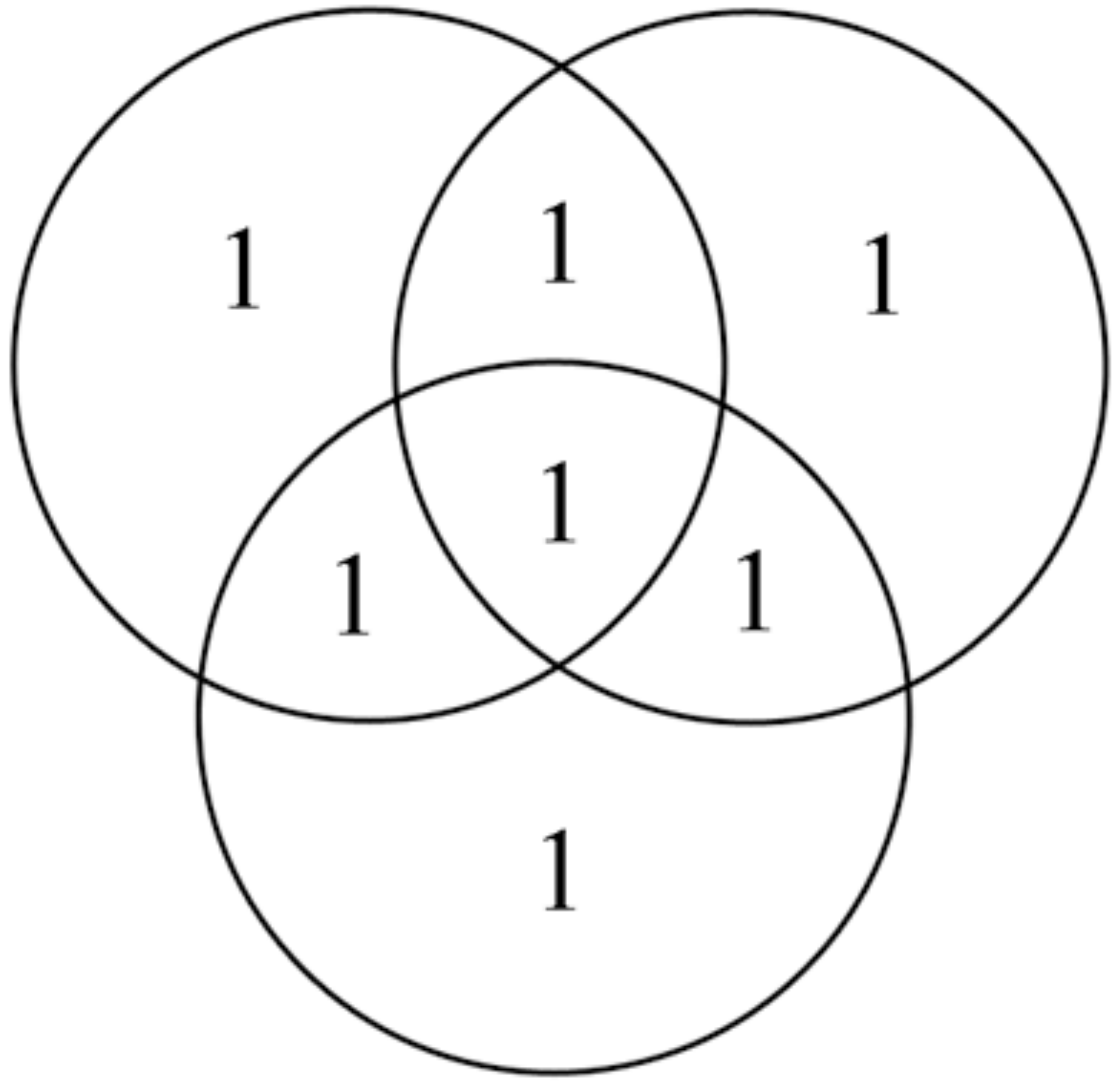
Siebformel

The number indicates how often elements of the particular segments are counted using the expression blow/above.

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$







$$|A| + |B| + |C|$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Illustration source: Wikipedia.

Siebformel

Satz 2.5. *(Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)*
Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n].
\end{aligned}$$

There are a few different ways we can write this formula, see here: Wikipedia.

Combinatorics

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1)$,$(1,2)$,$(1,3)$ $(2,1)$,$(2,2)$,$(2,3)$ $(3,1)$,$(3,2)$,$(3,3)$	$\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ $\{2,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$ $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$	$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

Example: $k = 2$ and $n = 3$, e.g. $S = \{1,2,3\}$.

Combinatorics: Intuition

I highly suggest reading the “Kombinatorik kurz und knapp” slides from Prof. Dr. Erich Walter Farkas who teaches the “Wahrscheinlichkeit und Statistik” course this semester.

I will upload the relevant slides on my website.

Example

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$$\Rightarrow \quad \Omega := \{(X,Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5\}$$

$$\text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}.$$

|C|=52

$$|\Omega| = \begin{cases} 52^5 \cdot 52^5 & ✗ \\ \binom{52}{10} \cdot \binom{10}{5} & ✓ \\ \dfrac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 42!} & ✓ \\ \binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} & ✓ \end{cases}$$

Example

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$$\Omega := \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C, X \cap Y = \emptyset, |X| = |Y| = 5,$$
$$\text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}.$$

Beispiel für ein Ereignis: E := „Spieler A hat vier Asse“

$$\text{Prob[E]} = \frac{\text{Anzahl Möglichkeiten in denen Spieler A vier Asse hat}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

$$= \frac{48 \cdot \binom{47}{5}}{|\Omega|}$$

Conditional Probability

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

"A bedingt auf B" oder "A gegeben B"

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Conditional Probability

1. $\Pr[A \mid A] = 1$, because if we know A already happened, then the probability of A happening should be 1.

$$\Pr[A \mid A] = \frac{\Pr[A \cap A]}{\Pr[A]} = \Pr[A]/\Pr[A] = 1.$$

2. $\Pr[A \mid \Omega] = \Pr[A]$, since Ω doesn't give us any information about A.

$$\Pr[A \mid \Omega] = \frac{\Pr[A \cap \Omega]}{\Pr[\Omega]} = \Pr[A]/1 = 1.$$

3. If B already happened, then A can only happen if also $A \cap B$ happened, so $\Pr[A \mid B]$ should be proportional to $\Pr[A \cap B]$.

Example (Blackboard)

Beispiel 2.9 (Zweikinderproblem) im Skript.

Conditional Probability

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

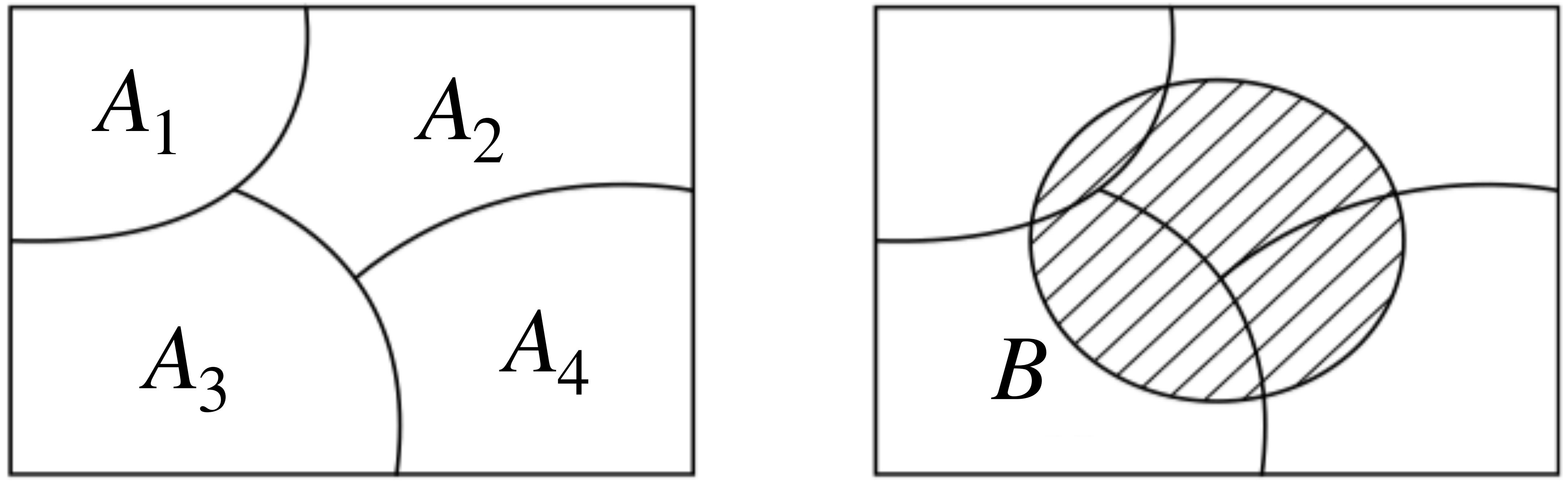


Illustration taken from "Wahrscheinlichkeit und Statistik" slides from this semester, first chapter.

Interactive Example (Blackboard)

Beispiel 1.30. Eine Urne enthält gleich viele gewöhnliche wie gezinkte Würfel. Bei den gezinkten Würfeln ist die 6 durch eine 7 ersetzt. Man zieht zufällig einen Würfel und würfelt damit.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Zahl gerade ist?

Conditional Probability

Satz 2.15. *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Independence

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[A] \cdot \Pr[B]}{\Pr[B]} = \Pr[A]$$

“[…] das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten.”, skript p. 101