Jeder Graph auf $n$ Knoten ist $n$-färbbar.

TRUE

**Definition 1.56.** Eine *(Knoten-)Färbung* (engl. *(vertex) colouring*) eines Graphen $G = (V, E)$ mit $k$ Farben ist eine Abbildung $c\colon V \to [k]$, sodass gilt

$$c(u) \neq c(v) \quad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E.$$

Let $k = n = |V|$.

Since $|V| = |[n]| = n$ we just choose a unique color for every $v \in V$.

Für das metrische TSP-Problem gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus, aber keinen 4-Approximationsalgorithmus

FALSE

$$\sum_{e \in C} \ell(e) \leq \underbrace{\alpha}_{2} \cdot \mathrm{opt}(K_n, \ell). \quad \leq 4 \cdot \mathrm{opt}(K_n, \ell).$$

Sei $T$ ein Spannbaum in $G$. Sei $e \in E$ eine Kante, die nicht in $T$ enthalten ist. Dann ist $e$ keine Brücke.

TRUE

Let $e = \{u, v\} \in E$, not in a spanning tree $T$ of $G$. Since $T$ is a tree, $u$ and $v$ are connected by a unique simple path $P$ in $T$ (Satz 1.6 (e)). After removing $e$, $P$ is still in $G$ and $u, v$ remain connected. ...

Sei $G$ ein 3-färbbarer Graph. Dann können wir für jeden Knoten $v \in V$ den induzierten Graphen auf der Nachbarschaft von $v$, $G[N(v)]$, mit zwei Farben färben.

TRUE

Proof by contradiction.

Assume $G(N(v))$ can only be colored in $k \geq 3$ colors. By definition of a coloring, $c(v) \neq c(w)$ $\forall w \in N(w)$ thus $k \geq 4 = 3 + 1$ ↯ $G$ is 3 colorable.

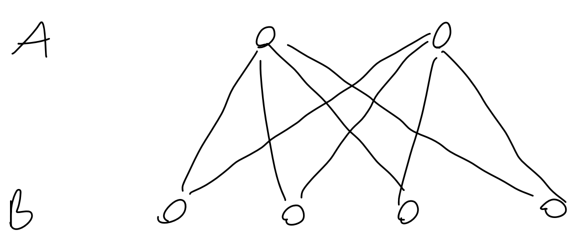
Angenommen, $G$ ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von $G$ ist gerade. Dann enthält $G$ ein perfektes Matching.

FALSE

consider any bipartite graph $K_{n,n+2k}$ where

$n = 2\ell \qquad \ell, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

e.g. $\ell = k = 1$




$\deg_A(v) = |B| = 2\ell + 2k \qquad \forall v \in A$

$\deg_B(v) = |A| = 2\ell \qquad \forall v \in B$

(i) all degrees even $\Rightarrow$ Euler tour

(ii) $|V| = |A| + |B| = 4\ell + 2k$ even.

but no perfect matching.

Der Satz von Dirac impliziert, dass Graphen, welche einen Knoten mit weniger als $\frac{n}{2}$ Nachbarn besitzen, keinen Hamiltonkreis haben.

FALSE

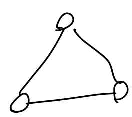
**Satz 1.40** (Dirac). **Wenn G = (V, E) ein Graph mit |V| ≥ 3 Knoten ist, in dem jeder Knoten mindestens |V|/2 Nachbarn hat, dann ist G hamiltonsch.**

$\delta(G) \geq |V|/2 \implies G$ contains Hamiltonian cycle.

$\overset{!}{\cancel{\Longleftarrow}}$ ↯

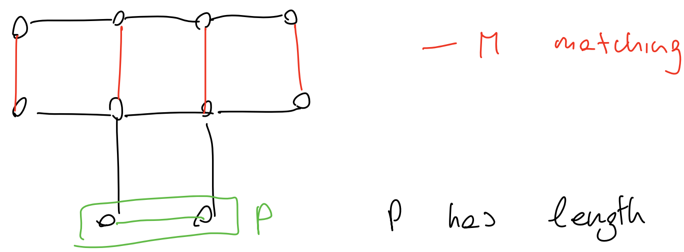
counterexample: any $C_n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

$C_3$:



Sei $M$ ein Matching in einem Graphen $G$. Dann gilt für jeden $M$-Augmentierenden Pfad $P$ dass er Länge mindestens $|M|/2$ hat.

FALSE




P has length $1 < 2 = |M|/2$ ↯

Sei $G$ ein vollständiger Graph mit einer Gewichtsfunktion auf den Kanten, sodass das Gewicht jeder Kante mindestens 1 ist. Angenommen, dass eine optimale TSP-Route in $G$ Kosten 10 hat.

Geben Sie eine bestmögliche obere Schranke auf die Kosten eines minimalen Spannbaums in $G$.

$\boxed{9}$

let $C_{opt}$ be a optimal TSP-route in $G$ with cost 10.

$C_{opt} - e$ for any $e$ in $E(C_{opt})$ is a spanning tree of $G$ since $C_{opt} - e$ is a path (connected, no cycles => tree) that contains all vertices of $G$ (=> spanning).

cost of edge is at least 1

=> 9 is best upper bound (since cost of e could be higher then 1)

Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gilt genau dann $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$, wenn es ein Matching $M$ der Kardinalität $|M| = |A|$ gibt.

TRUE

**Satz 1.52** (Satz von Hall, Heiratssatz). Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gibt es genau dann ein Matching $M$ der Kardinalität $|M| = |A|$, wenn gilt

$$|N(X)| \geq |X| \quad \text{für alle } X \subseteq A. \tag{1.1}$$

Sei $G$ ein zusammenhängender Graph, und sei $v$ ein Knoten in $G$ mit $deg(v) < \Delta(G)$.

Der Greedy-Colouring Algorithmus benötigt höchstens $\Delta(G)$ Farben um $G$ zu färben, wenn er für eine Knotenreihenfolge angewendet wird, in der $v$ als **erstes** gefärbt wird.

FALSE

**Beispiel 1.62.** Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad $\Delta(G)$. Weiter nehmen wir an, dass es einen Knoten $v \in V$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$. Wenn wir jetzt eine Breiten- oder Tiefensuche in $v$ starten und die Knoten in *umgekehrter* Reihenfolge nummerieren, wie sie vom Algorithmus durchlaufen werden (der Knoten $v$ ist also der

$v_n = v$ i.e. last !

Jeder Baum ist bipartit.

TRUE

Let $u$ be root of $G$, a tree.

There is a unique simple $u$–$v$ path for all $v \in V$ (Satz 1.6 (e)).

Let $P_v$ be the path from $u$ to $v$ and let $f(v)$ be the length of $P_v$ ($f(u) := 0$).

For every edge $e = \{x, y\}$ we have $f(x) \not\equiv_2 f(y)$ (they differ in parity) (Why?)

Set $c(x)$ to be $f(x) \bmod 2$ then $c$ is a coloring from $V$ to $\{0,1\}$.