(I)

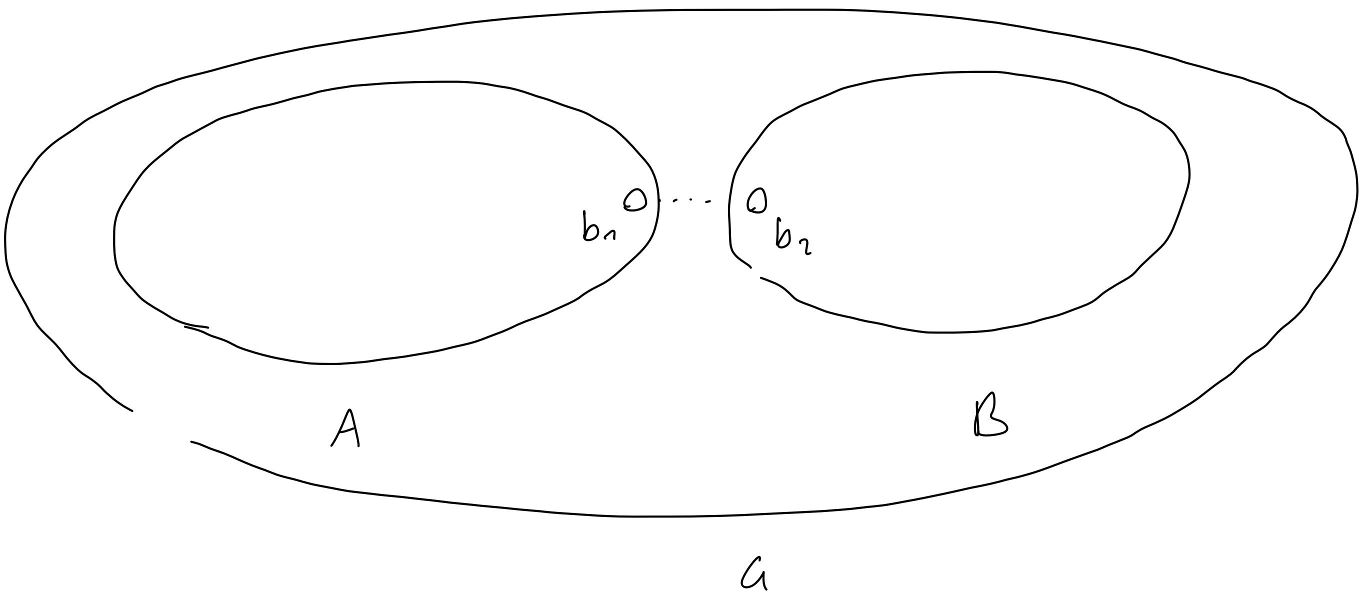
Aufgabe 1 – ***Zusammenhang***

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein *zusammenhängender* Graph mit mindestens drei Knoten, d.h. $|V| \geq 3$.

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $deg(v)$ für alle $v \in V$ eine gerade Zahl ist, dann ist G 2-Kanten-zusammenhängend. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Genauer: Gilt für jeden 2-Kanten-zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$, dass für alle $v \in V$ der Grad $deg(v)$ eine gerade Zahl ist?

Proof by Contradiction

Assume G not 2-Kanten-zshgd. Then there exists a bridge $e = \{b_1, b_2\}$ s.t. $G - e$ is not connected.



Let $deg_A(w)$ denote the degree of w in conn. comp. A.

Satz 1.2. $\Longrightarrow$ $\sum_{v \in A} deg_A(v) = 2 \cdot e(A)$

where $e(A)$ = # edges in conn. comp. A.

But $\sum_{v \in A} \deg_A(v) = \deg_A(b_1) + \sum_{v \in A \setminus \{b_1\}} \deg_A(v)$

$$= (\deg_G(b_1) - 1) + \sum_{v \in A \setminus \{b_1\}} \deg_A(v)$$

$$= 2k - 1 \quad \text{for } k \in \mathbb{N}.$$

Contradiction to theorem 1.2.

a bridge cannot exist.

Aufgabe 1 – *Zusammenhang*

(II)

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein *zusammenhängender* Graph mit mindestens drei Knoten, d.h. $|V| \geq 3$.

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $deg(v)$ für alle $v \in V$ eine gerade Zahl ist, dann ist G 2-Kanten-zusammenhängend. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Genauer: Gilt für jeden 2-Kanten-zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$, dass für alle $v \in V$ der Grad $deg(v)$ eine gerade Zahl ist?

Satz 1.31.
$\Longrightarrow$ E is Eulerian tour in G.

Let u, v be arbitrary in V, $u \neq v$.

Let $v_0, v_1, \dots, v_m$ be a Eulerian tour in G s.t. $v_0 = v_m = u$.

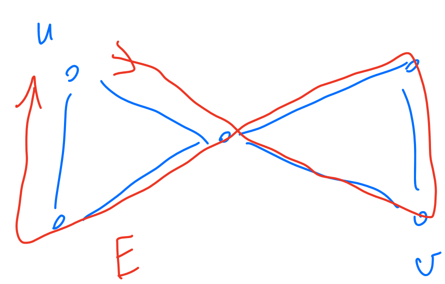
Def. Euler tour?

Let i_{min} be the smallest i s.t. $v_i = v$ (first encounter).

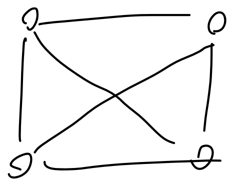
Def. 1.30 every edge exactly once

$v_0 \dots v_i$, $v_i \dots v_m$ are Kanten-disjunkte Pfade $\xRightarrow{\text{Satz 1.25 (Menger)}}$ every u-v edge-seperator is ~~of~~ size 2.

Since u, v were arbitrary, G is 2 Kanten-zshgd.



($\Leftarrow$) ?

K_4  is 3-kanten-zshgd.

but for all $v \in V$ $\deg(v)$ is odd.

(b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Falls G einen Hamiltonkreis enthält, so ist G 2-zusammenhängend.

For arbitrary $u, v \in V$, $u \neq v$ define

Hamilton cycle $H = \langle v_0 \dots v_n \rangle$, $v_0 = v_n = u$.

$P_1 = \langle v_0 \dots v \rangle$, $P = \langle v \dots v_n \rangle$ are two

vertex disjoint paths

Satz 1.25 (Menger) $\Longrightarrow$ every u-v vertex-seperator

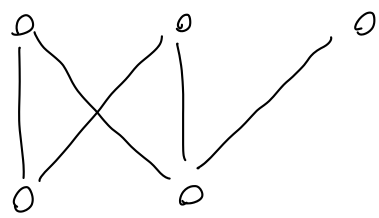
seperator is of size 2.

Since u, v were arbitrary, G is

2 zshgd.

(ii) Falls G 2-zusammenhängend ist, so enthält G einen Hamiltonkreis.

$K_{2,3}$



- is bipartite
- is 2-zshgd.
- no Hamilt. cycle because

$3 \neq 2$!

(c) Nehmen Sie an, dass G 2-zusammenhängend ist. Sei (u, v, w) ein Pfad der Länge 2 in G. Zeigen Sie, dass wir diesen Pfad zu einem Kreis erweitern können, also, dass G einen Kreis enthält, in dem u, v, w als benachbarte Knoten vorkommen.

Satz 1.25 (Menger) $\Longrightarrow$ P_1, P_2 are two vertex-disjoint u,w paths.

Since P_1, P_2 are vertex-disjoint, only one has v in it. W.l.o.g. $v \in P_2$.

Then P_1 can be extended to a cycle.