29.02.2024 — Minitest 1

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei die Anzahl seiner Knoten mit ungeradem Grad gerade. Dann enthält G eine Eulertour.

Korollar 1.3. Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt: Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.

we proved this!

So G is just some graph.

FALSE

Satz 1.31. a) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.
b) In einem zusammenhängenden, eulerschen Graphen kann man eine Eulertour in Zeit $O(|E|)$ finden.

Sei n eine natürliche Zahl und G ein bipartiter Graph auf $2n + 1$ Knoten. Dann gilt: G enthält keinen Hamiltonkreis.

A Hamiltonian cycle on $2n+1$ vertices is of length $2n+1$, which is odd!

A bipartite graph can't contain odd cycles!

TRUE

Satz 1.58. Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.

Der Kreis auf acht Knoten (C_8) ist 2-zusammenhängend.

Definition 1.23. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k-*zusammenhängend*, falls $|V| \geq k + 1$ und für alle Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $G[V \setminus X]$ ist zusammenhängend.

Every cycle is 2-zusammenhängend!

Satz 1.25 (Menger). Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V, u \neq v$. Dann gilt:

a) Jeder u-v-Knotenseparator hat Grösse mindestens $k \iff$ Es gibt mindestens k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade.

TRUE

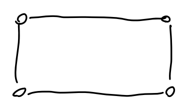
Sei G ein zusammenhängender Graph, $T(G)$ ein Spannbaum von G und $e \in E(T(G))$ eine Kante im Spannbaum. Es gilt: e ist eine Brücke in G.

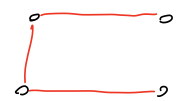
Let G be a conn. graph and $T(G)$ a spanning tree of G.

$$e \in \underbrace{E(T(G))}_{\text{edges in } T(G)} \implies e \text{ is a bridge in } G.$$

counterexample:

FALSE





no bridges!

How about:

$$e \in \underbrace{E(T(G))}_{\text{edges in } T(G)} \Longleftarrow e \text{ is a bridge in } G.$$

Suppose $e \in E(G)$ is a bridge and $T(G)$ some spanning tree not containing e.

Then $T(G)$ is a subgraph of $G \setminus \{e\}$, a disconn. graph, hence itself disconn. ↯

Actually it holds:

$$e \text{ is a bridge} \iff \text{any } T(G) \text{ contains } e.$$

How about:

$$e \in \underbrace{E(T(G))}_{\text{edges in } T(G)} \implies e \text{ is a bridge in } T(G).$$

Satz 1.6. Ist $G = (V, E)$ ein Graph auf $|V| \geq 1$ Knoten, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) G ist ein Baum,
(b) G ist zusammenhängend und kreisfrei,
(c) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$,
(d) G ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$,
(e) für alle $x, y \in V$ gilt: G enthält genau einen x-y-Pfad.

this unique path is disconnected...

TRUE!

Gegeben sind für einen Graphen G zwei Blöcke A, B mit $A \neq B$. Dann liegt keine Kante sowohl in A als auch in B.

Definition/Proposition 1.29. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Für $e, f \in E$ definieren wir eine Relation durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow e = f \text{ oder es gibt einen gemeinsamen Kreis durch } e \text{ und } f.$$

Dann ist diese Relation eine Äquivalenzrelation. Wir nennen die Äquivalenzklassen *Blöcke*.

$A = [e] = \{x \in E(G) : e \sim x\}$

$\neq \qquad (e \neq f)$

$B = [f] = \{x \in E(G) : f \sim x\}$

If they had a common edge, then it would be the same block (transitivity).

TRUE

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$, der keinen Artikulationsknoten enthält, ist 2-zusammenhängend.

Definition 1.23. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k-*zusammenhängend*, falls $|V| \geq k + 1$ und für alle Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $G[V \setminus X]$ ist zusammenhängend.

Articulation vertex $v \implies G \setminus \{v\}$ disconnected.

such set $\{v\}$ doesn't exist.

Then X s.t. $G[V \setminus X]$ disconn. must

mean $|X| \geq 2$.

TRUE

Für das metrische TSP-Problem gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus, aber keinen 4-Approximationsalgorithmus.

Def.: α-approximation algorithm for TSP finds Hamiltonian cycle C s.t.

$$\sum_{e \in C} \ell(e) \leq \alpha \cdot opt(K_n - \ell)$$

but then for $\alpha = 2$ we have

$$\sum_{e \in C} \ell(e) \leq 2 \cdot opt(K_n - \ell) \leq 4 \cdot opt(K_n - \ell).$$

This means a α-approx. alg. is also a β-approx. alg. for $\beta > \alpha$.

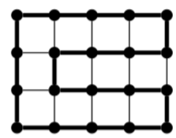
FALSE

we will later see a $3/2$-approx alg. using matchings.

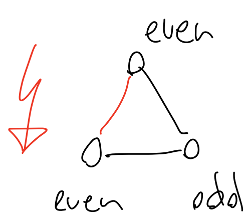
Seien $k, \ell > 1$ und k, ℓ beide ungerade. Das $(k \times \ell)$-Gitter enthält keinen Hamiltonkreis.

TRUE

Beispiel 1.37. Wann ist ein Gittergraph $M_{m,n}$ hamiltonsch? – Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Für das 4×5 Gitter ist ein Hamiltonkreis schnell gefunden:



Schnell sieht man auch ein, dass man auf ähnliche Weise immer dann einen Hamiltonkreis in $M_{m,n}$ finden kann, falls m oder n gerade ist. Falls hingegen sowohl m als auch n ungerade, so gibt es keinen Hamiltonkreis. Dies können wir wie folgt einsehen. Sei $[m] \times [n]$ die Knotenmenge des $m \times n$ Gitters. Dann sind zwei Knoten (i, j) und (k, ℓ) genau dann benachbart, falls $|i-k|+|j-\ell| = 1$. Bezeichnen wir $i+j \bmod 2$ die *Parität* des Knoten (i, j), folgt sofort, dass benachbarte Knoten unterschiedliche Parität haben. Damit ergibt sich: In einem Weg gerader Länge haben Anfangs- und Endpunkt gleiche Parität, in einem Weg ungerader Länge ist die Parität unterschiedlich. Betrachte nun einen Hamiltonkreis, falls denn so einer existiert. Er hat die Länge mn. Ein solcher Kreis ist ein Weg der einerseits im gleichen Knoten endet wie er beginnt, andererseits, ist mn ungerade, ist die Parität von Anfangs- und Endknoten unterschiedlich – offensichtlich ein Widerspruch.



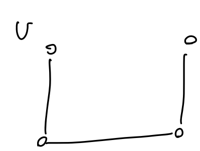
In einer Tiefensuche sei $w \in V$ das erste Kind von $v \in V$ im DFS-Baum. Falls $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$, so ist v ein Artikulationsknoten.

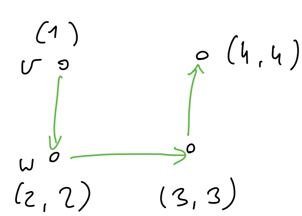
v ist genau dann Artikulations-knoten, wenn
1) v ≠ root, und v hat ein Kind u im DFS-Baum mit $\text{low}[u] \geq \text{dfs}[v]$
oder
2) v = root, und v hat mindestens zwei Kinder im DFS-Baum.

Notice that we distinguish between root and non-root vertices!

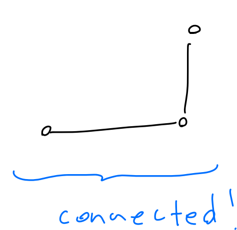
FALSE

(dfs, low)





$2 = \text{low}[w] \geq \text{dfs}(v) = 1$
but



Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, der in einer Adjazenzmatrix gespeichert ist, kann man in Zeit $O(|V|^2)$ alle Artikulationsknoten und alle Brücken berechnen.

Satz 1.27. **Für zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$, die mit Adjazenzlisten gespeichert sind, kann man in Zeit $O(|E|)$ alle Artikulationsknoten berechnen.**

"Analyse": DFS extended with changes in $O(1)$

```
DFS-VISIT(G, v)
num ← num + 1                      } O(1)
dfs[v] ← num
low[v] ← dfs[v]
isArtVert[v] ← FALSE
for all {v, w} ∈ E do
    if dfs[w] = 0 then             } O(1)
        T ← T + {v, w}
        val ← DFS-VISIT(G, w)
        if val ≥ dfs[v] then
            isArtVert[v] ← TRUE    } O(1)
        low[v] ← min{low[v], val}
    else dfs[w] ≠ 0 and {v, w} ∉ T
        low[v] ← min{low[v], dfs[w]}
return low[v]
```

G connected hence $m \geq n - 1$.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n + n}_{\text{DFS}} \leq O(m)$$

with adjacency matrix we consider each vertex once, but have to iterate through all other vertices to check for neighbors:

$$n \cdot n = n^2 \leq O(n^2)$$

TRUE

Vollständige Graphen sind die einzigen zusammenhängenden Graphen, welche sowohl eine Eulertour als auch einen Hamiltonkreis enthalten.

Satz 1.31. a) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.
b) In einem zusammenhängenden, eulerschen Graphen kann man eine Eulertour in Zeit $O(|E|)$ finden.

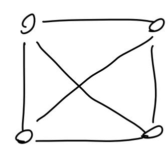
We have for all $v \in K_n$: $\deg(v) = n-1$.

For even n, $n-1$ is odd (for every vertex).

counterexample:

FALSE

K_4



However, K_n always contains Hamiltonian cycles.