ETH Zürich
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng
Prof. Angelika Steger

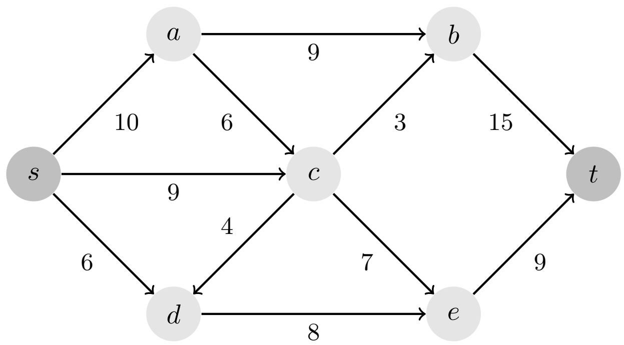
FS 2024

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Theorie-Aufgaben 6

Abgabe in Moodle () bis zum 30.05.2024 um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 – *Flüsse*

Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk mit Quelle s und Senke t, wobei die Zahlen die Kapazitäten der Kanten angeben.



Auf einigen Netzwerkkanten ist eine nichtnegative Funktion f gegeben durch

(x,y)	(s,a)	(s,c)	(s,d)	(a,c)	(d,e)	(b,t)
$f(x,y)$	10	7	0	5	2	8

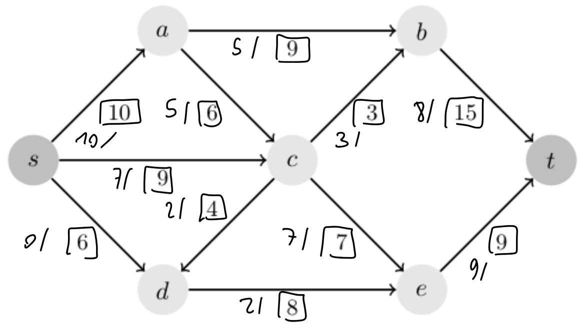
(a) Wie ist f auf alle übrigen Netzwerkkanten fortzusetzen, so dass f ein Fluss ist? Was ist der Wert dieses Flusses?

(b) Zeichnen Sie das Residualnetzwerk.

(c) Finden Sie einen augmentierenden Pfad von s nach t und erhöhen Sie den Fluss entlang dieses Pfades um den maximal möglichen Betrag. Falls nötig, dann iterieren Sie diesen Schritt, bis der so gefundene Fluss maximal ist.

(d) Beweisen Sie, dass Ihr Fluss maximal ist, indem Sie einen Minimalen Schnitt im Netzwerk finden.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $N = (V, A, c, s, t)$ ein Netzwerk mit mindestens einem $s-t$ Pfad, und sei f ein maximaler Fluss in N. Falls keine Kantenkapazität in N ganzzahlig ist, dann ist f kein ganzzahliger Fluss.



(a) Die fehlenden Werte des Flusses ergeben sich aus der Flusserhaltung wie folgt:

$$f(a,b) = 5, \quad f(c,b) = 3, \quad f(c,d) = 2, \quad f(c,e) = 7, \quad f(e,t) = 9.$$

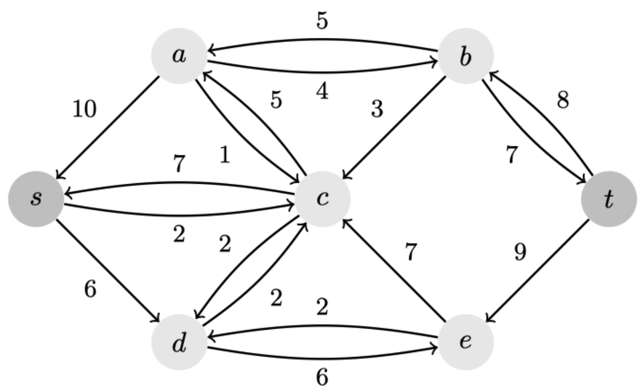
Es gibt verschiedene Reihenfolgen um die Werte zu finden, die oben angegebene Reihenfolge ist eine Möglichkeit. Der Wert des Flusses lässt sich als vorzeichenbehaftete Summe der aus s herausfliessenden Ströme berechnen:

$$\mathrm{val}(f) = f(s,a) + f(s,c) + f(s,d) = 10 + 7 + 0 = 17,$$

oder auch als vorzeichenbehaftete Summe der in t hineinfliessenden Ströme:

$$\mathrm{val}(f) = f(b,t) + f(e,t) = 8 + 9 = 17.$$

(b)



(c) Ein augmentierender Pfad ist (s,d,e,c,a,b,t). Entlang dieses Pfades kann man den Fluss maximal um den Wert 4 erhöhen, da der Fluss entlang der Kante (a,b) maximal um 4 erhöht werden kann. Der Wert des erhöhten Flusses $\tilde{f}$ beträgt $17 + 4 = 21$. Danach gibt es keinen augmentierenden Pfad mehr. (Bemerkung: ein anderer möglicher augmentierender Pfad ist z.B. (s,c,a,b,t).)

(e) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $N = (V, A, c, s, t)$ ein Netzwerk mit mindestens einem $s-t$ Pfad, und sei f ein maximaler Fluss in N. Falls keine Kantenkapazität in N ganzzahlig ist, dann ist f kein ganzzahliger Fluss.

Def: ganzzahliger Fluss falls $\forall e \in A: f(e) \in \mathbb{Z}$

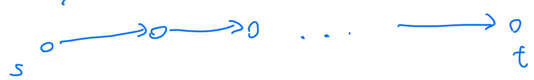
(nicht $val(f) \in \mathbb{Z}$!)

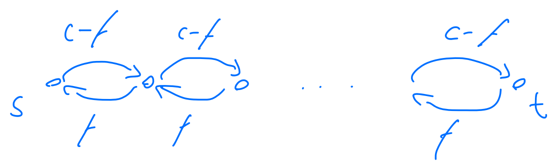
Beweis durch Widerspruch. (Aussage ist wahr)

Angenommen f ist maximal und ganzzahlig und keine Kantenkapazität in N ist ganzzahlig.

Wir betrachten einen beliebigen $s-t$ Pfad und bemerken, dass dieser ein augmentierender Pfad ist.

$f(e) \in \mathbb{Z}$, aber $c(e) \notin \mathbb{Z}$, d.h. Restkap.





.