Lemma 3.6. proof

Naturally we have that

$$\sum_{e \in A} f(e) - \sum_{e \in A} f(e) = 0 .$$

Any edge $e = (u,v) \in A$ must start in one vertex and end in another (no loops). Thus we have

$$\sum_{v \in V} \sum_{u \in V : (v,u) \in A} f(v,u) = \sum_{e \in A} f(e)$$

and similarly

$$\sum_{v \in V} \sum_{u \in V : (u,v) \in A} f(v,u) = \sum_{e \in A} f(e)$$

From this we get

$$0 = \sum_{e \in A} f(e) - \sum_{e \in A} f(e)$$

$$= \sum_{v \in V} \sum_{u \in V : (v,u) \in A} f(v,u) - \sum_{v \in V} \sum_{u \in V : (u,v) \in A} f(u,v)$$

$$= \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in V : (v,u) \in A} f(v,u) - \sum_{u \in V : (u,v) \in A} f(u,v) \right).$$

From the Flusserhaltung we get

▶ **Flusserhaltung**: Für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt

$$\sum_{u \in V:\,(u,v) \in A} f(u,v) = \sum_{u \in V:\,(v,u) \in A} f(v,u) \,.$$

$$\sum_{v \in V} \underbrace{\left(\sum_{u \in V:\,(v,u) \in A} f(v,u) - \sum_{u \in V:\,(u,v) \in A} f(u,v) \right)}_{=0 \text{ for all } v \in V \setminus \{s,t\}}$$

$$= \left(\sum_{u \in V:\,(s,u) \in A} f(s,u) - \sum_{u \in V:\,(u,s) \in A} f(u,s) \right) + \left(\sum_{u \in V:\,(t,u) \in A} f(t,u) - \sum_{u \in V:\,(u,t) \in A} f(u,t) \right).$$

By definition of $\mathrm{val}(f)$ and $\mathrm{netinflow}(t)$

$\mathrm{val}(f) := \mathrm{netoutflow}(s) := \sum_{u \in V:\,(s,u) \in A} f(s,u) - \sum_{u \in V:\,(u,s) \in A} f(u,s) \,.$ | $\mathrm{netinflow}(t) := \sum_{u \in V:\,(u,t) \in A} f(u,t) - \sum_{u \in V:\,(t,u) \in A} f(t,u)$

we get

$$\left(\sum_{u \in V:\,(s,u) \in A} f(s,u) - \sum_{u \in V:\,(u,s) \in A} f(u,s) \right) + \left(\sum_{u \in V:\,(t,u) \in A} f(t,u) - \sum_{u \in V:\,(u,t) \in A} f(u,t) \right)$$

$$= \mathrm{val}(f) + (-\mathrm{netinflow}(t)) \,.$$

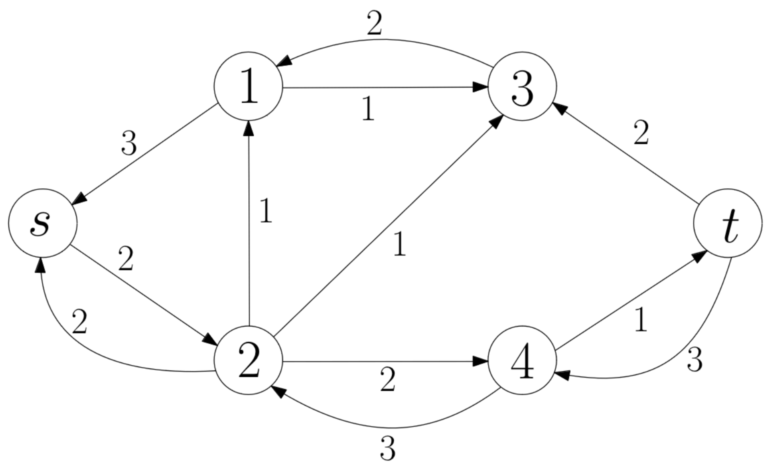
Finally we have

$$\mathrm{val}(f) + (-\mathrm{netinflow}(t)) = 0 \,.$$

And thus $\mathrm{val}(f) = \mathrm{netinflow}(t)$. $\square$

Aufgabe 4 – *Restnetzwerk*

Sei N ein Netzwerk ohne entgegengesetzte Kanten und sei f ein Fluss in G. Unten abgebildet sehen Sie das Restnetzwerk R_f.

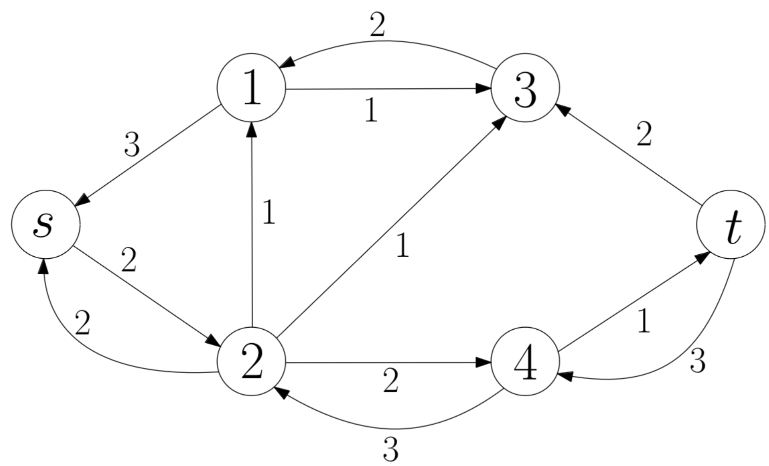


(a) Ist f maximal? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort. *(1 Punkte)*

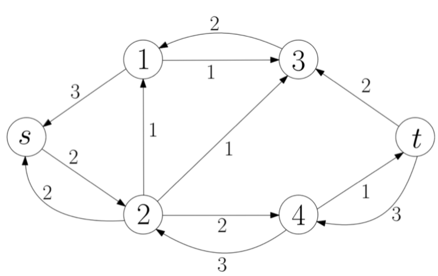
No. Notice that there exists a directed s-t path $\langle s, 2, 4, t \rangle$. By theorem 3.11, this means that f is not maximal.

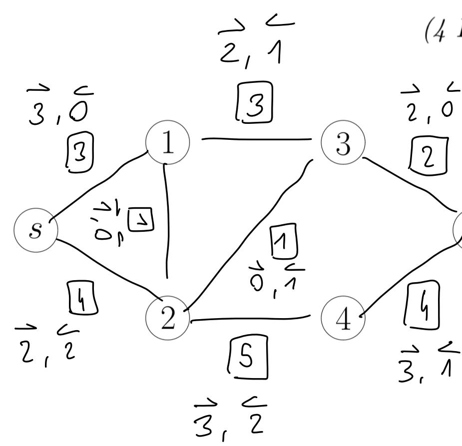
Aufgabe 4 – *Restnetzwerk*

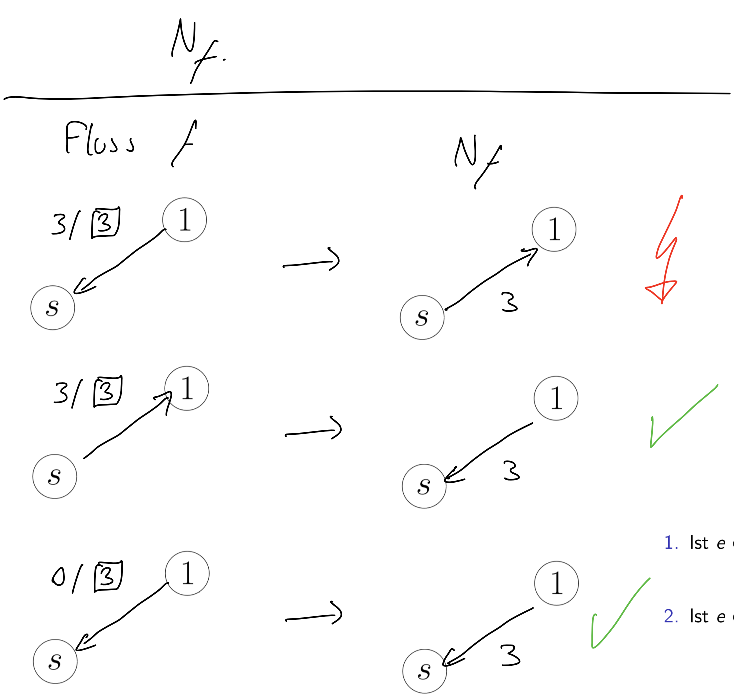
Sei N ein Netzwerk ohne entgegengesetzte Kanten und sei f ein Fluss in G. Unten abgebildet sehen Sie das Restnetzwerk R_f.

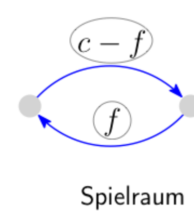


(b) Rekonstruieren sie N und f. *(4 Punkte)*







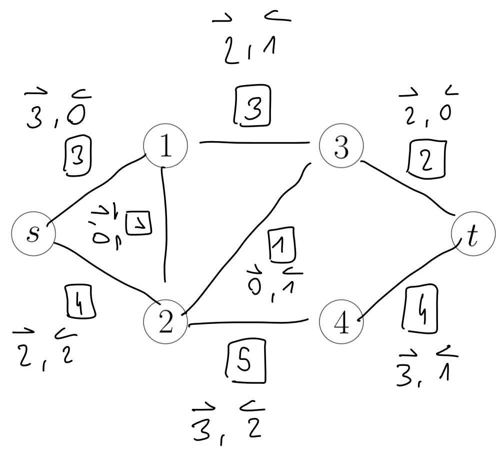


1. Ist $e \in A$ mit $f(e) < c(e)$, dann ist e eine Kante in A_f, mit

   $r_f(e) := c(e) - f(e)$.

2. Ist $e \in A$ mit $f(e) > 0$, dann ist e^{opp} in A_f, mit

   $r_f(e^{\text{opp}}) = f(e)$.



from here we tried multiple possibilities to see what would yield a valid flow.

Final solution:

(b) Notation: Fluss f / Kapzität c: