A&D Cheatsheet

Gent Serifi, Stand: 26.09.2022

Notiz: Potenzregeln und Logarithmusregeln werden im Folgenden vorausgesetzt, das macht alles etwas kompakter (diese können auch einfach im Internet nachgeschaut werden).

Notationen

$f : D \to W$ heisst: Eine Funktion die Werte aus D (Definitionsbereich) auf Werte in W (Wertebereich) abbildet.
Eine **"closed function"** ist einfach eine Funktion, die gängige Funktionen verwendet. Das heisst um die Funktion auszudrücken können wir Polynome, Potenzen, Trigonometrische Funktionen, etc. verwenden.

Limes crash course

Im Rahmen der Vorlesung werden wir nur den Limes anschauen, wo die Laufvariable (meinstens n) nach unendlich strebt. ($\lim\limits_{n\to\infty}$)

Rechenregeln

Im Folgenden seien f, g Funktionen und α, β reele Zahlen.
Wir sagen ein Grenzwert(Limes) existiert, falls dieser einen reelen Wert annimmt, d.h. $-\infty$ und ∞ gehören nicht dazu.
Es gelten folgende Regeln:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot f(n) \pm \beta) = (\alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f(n)) \pm \beta$ (aka. Konstanten dürfen aus dem Limes herausgezogen werden)
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \pm g(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(n)$, das ist grundsätzlich nur erlaubt wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)$ beide definiert sind (also nicht $-\infty$ oder ∞). Es darf jedoch einer der beiden undefiniert sein: z.B. "$0 + \infty$" oder "$-\infty + 2$", also kein "$-\infty + \infty$"!.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \cdot g(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} g(n)$, hier das gleiche Spiel wie oben, zusätzlich noch: kein "$0 \cdot \infty$"
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)}$, gleich wie oben (also kein "$\frac{0}{\infty}$", zusätzlich kein "$\frac{\infty}{\infty}$" oder "$\frac{0}{0}$"). Gilt ausserdem nur wenn $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) \neq 0$

Wir sagen eine Funktion $f(n)$ wächst schneller als $g(n)$, wenn Folgendes gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.
Analog dazu $f(n)$ wächst langsamer als $g(n)$ ....
Wir sagen eine Funktion $f(n)$ wächst gleich schnell wie $g(n)$, wenn Folgendes gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}$.

Einschub Stetigkeit (Intuitiv, gilt für die meisten Funktionen die wir sehen werden): Wir sagen eine Funktion f ist **stetig**, wenn man den Graphen ohne Unterbruch zeichnen kann (auch: wenn man den Graphen mit einem Bleistfit zeichnen kann ohne diesen abzuheben). Das heisst die Funktion macht keine Sprünge.

Sei $f(n)$ eine stetige Funktion, es gilt:

5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty} g(n))$, z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{g(n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)}$, sehr nützlich!

Tricks um Grenzwerte zu berechnen

Empfehlung, gängige Grenzwerte auswendig lernen, z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, etc.

1. Für Brüche mit Polynomen, Faktorisierungs-Trick anwenden, also z.B.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{5}{n})}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$
2. "e hoch log"-Trick: wenn der Limes schwer aussieht, kann man den Term mit $e^{\log n}$ ersetzen (beides sind Umkehrfunktionen voneinander also heben sie sich auf, daher darf man das benutzen, es ist ähnlich als würde man $+1-1$ rechnen). Das ermöglicht es oft die Logarithmus Regeln zu nutzen: also z.B. Potenzen zu Faktoren umwandeln $\log n^a = a \cdot \log n$.
Beispiele: siehe Aufgaben 0.3 f) und g)

Einschub Ableiten

Fürs Ableiten gibt einige praktische Regeln:

1. $(f+g)'(n) = f'(n) + g'(n)$
2. $(f \cdot g)'(n) = f'(n) \cdot g(n) + g'(n) \cdot f(n)$
3. $(\frac{f}{g})'(n) = \frac{f'(n)g(n) - f(n)g'(n)}{g(n)^2}$ für $g(n) \neq 0$
4. $(g \circ f)'(n) = (g(f(n)))' = g'(f(n)) \cdot f'(n)$
5. $(f(n)^{g(n)})' = f(n)^{g(n)} \cdot [ln(f(n)) \cdot g(n)]'$

Ausserdem solltet ihr die gängisten Ableitungen kennen (werde diese hier nicht aufführen, gibt viele Listen online), z.B. von Polynomen, e^n, $\log n$, $\sqrt{n}$, etc.

Regel von de l'Hôpital

Seien $f(n)$ und $g(n)$ zwei differenzierbare Funktionen.
Wir betrachten $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. Wichtig!!, wir dürfen diesen Satz nur anwenden wenn wir einen der folgenden Fälle haben: "$\frac{\infty}{\infty}$" oder "$\frac{0}{0}$". Sprich wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$ (analog mit 0). Praktischerweise können viele unentscheidbare Fälle in diese zwei Formen umgewandelt werden: "$0 \cdot \infty$", etc. z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \cdot n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1/e^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}$.
Falls die Bedingungen erfüllt sind, dürfen wir Folgendes machen:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$
Wir können dieses Spiel solange wiederholen, wie der Limes die Bedingungen erfüllt (also man kann noch weiter ableiten). Das gibt uns oft einfachere Terme und vereinfacht die Berechnung des Grenzwerts.

Asymptotisches Wachstum

Wir können Funktionen anhand des asymptotischen Wachstum "sortieren". Dabei ist es wichtig, dass z.B. f(n) < g(n), nicht bedeuted dass die Funktion immer kleiner ist, sondern asymptotisch langsamer wächst (nur in diesem Kontext so). Analog dazu ">" entspricht schneller wachsend und "=" entspricht gleich schnell wachsend. Wir werden das später noch im Detail anschauen.

$$\cdots < \log\log n < \log n < \sqrt{n} < n = n + \sqrt{n} < n \cdot \log n < n\sqrt{n} < n^2 = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n < n^3 < \cdots < 2^n < e^n < n! < n^n < n^{n^n} < \ldots$$

Rekursive Formeln

Oft werdet ihr rekursiv definierte Formeln antreffen (neu in Exercise 1), diese werden oft so aufgeschrieben:
$a_1 = C \in \mathbb{R}, a_{n+1} =$ irgendwas mit a_n, das Ziel ist es dann oft eine **closed** formula/function zu finden für $a_n = a(n)$.

Die wohl bekannteste rekursive Formel ist die Fibonacci-Folge: $a_1 = 0, a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
Oft hilft es ein paar Werte aufzuschreiben $(a_1, a_2, a_3, ...)$ um ein Muster zu erkennen. Daraus seht ihr dann was eine solche Formel/Funktion sein könnte. Ihr müsst dann per Induktion diese Formel/Funktion beweisen, das würde etwa so aussehen:

Base Case: $n = 1$
Induction Hypothesis: Assume [claim] holds for some n
Induction Step: $n \to n + 1$

Dabei braucht ihr im **Induction Step** die rekursive Definition. Ich kann leider keine Beispiele bringen, da es in der Serie eine Bonusaufgabe ist (ich werde das aber in der nächsten Übungsstunde besprechen).

Abschätzen, Schranken finden

In der nächsten Übung müsst ihr gewisse Terme abschätzen (also obere und untere Schranken finden). Diese Übungen sind sehr wichtig, da sie oft dran kommen.
Beispiel: $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i \leq \sum_{i=1}^{n} n = n^2$. Man kann sich das so vorstellen, dass alle Zahlen bis n kleiner sind als n (also $1, 2, 3, \ldots$), dadurch ist die Summe sicher kleiner, als wenn wir überall n einsetzen würden. (Das Beispiel sollte reichen um 1.3 a) zu lösen)
Um untere Schranken zu finden, schaut man sich oft nur die Hälfte der Summe an, das Ergebnis ist kleiner, da wir nur Terme weglassen.
Beispiel: $\sum_{i=1}^{n} i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \lceil \frac{n}{2} \rceil = (n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$
Was noch nützlich ist, sind folgende Abschätzungen: $\lceil n \rceil \leq n + 1$ und $\lfloor n \rfloor \geq n - 1$. (In der Übungsstunde angeschaut)